

THESES

présentées

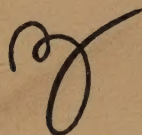
à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR-INGENIEUR

par

A. CHOMARAT



1^{ère} THESE : Contribution à l'étude des vibrations d'un solide indéformable
à la surface libre d'un liquide .

2^{ème} THESE : Propositions données par la Faculté .

Soutenues le 28 MARS 1966 devant la Commission d'Examen

1966

M. PIRONNEAU *Président*

M. RAVILLY
M. VIVIER } *Examineurs*

THESES

présentées

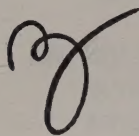
à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR-INGENIEUR

par

A. CHOMARAT



1^{ère} THESE : Contribution à l'étude des vibrations d'un solide indéformable
à la surface libre d'un liquide .

2^{ème} THESE : Propositions données par la Faculté .

Soutenues le **28 MARS 1968** devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU *Président*

M. RAVILLY
M. VIVIER } *Examineurs*

UNIVERSITE de NANTES

FACULTE DES SCIENCES

Doyen M. BRILLOUET

Assesseur M. GARRIGUES

Professeurs Titulaires

MM. BRILLOUET

Mathématiques

PAUC

«

PETRESCU

«

PIRONNEAU

«

RAFFIN

«

RAVILLY

«

BOULLLOUD

Physique

COLLET

«

DUNOYER

Chimie

GRAFF

«

Mlle DEBRAUX

Biologie

MM. GARRIGUES

«

PIERI

«

SELLIER

«

Professeurs et Maîtres de Conférences

MM. MOLINARO

Mathématiques

VIVIER

«

AVIGNON

Physique

GOUREAUX

«

GRANGE

«

LASKAR

«

MEZENCEV

«

MOULTON

«

MINN

«

Mlle OFFRET

«

MM. GOBIN

Chimie

JOLIVET

«

MARTIN

«

POINTEAU

«

QUINIOU

«

ROUXEL

«

WOJKOWIAK

«

AMOURIQ

Biologie

Mlle ASTIE

«

MM. DUPONT

«

LE DOUARIN

«

CAVET

Géologie

FORESTIER

«

OTTMANN

«

Secrétaire

M. PAILLET

AVANT - PROPOS

Le présent travail a été effectué au Laboratoire de Mécanique des Structures, dirigé par M. le Professeur PIRONNEAU, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes .

Nous voudrions particulièrement remercier Monsieur le Professeur PIRONNEAU, qui a inspiré ce travail et nous a permis de le mener à bien, en nous initiant à la recherche et en nous guidant de ses conseils éclairés. Nous lui présentons l'expression de notre profonde et respectueuse gratitude .

Nous tenons à témoigner nos plus vifs remerciements à Monsieur le Professeur PLUNKETT, Professeur de Mécanique à l'Institut de Technologie de MINNEAPOLIS , pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à nos recherches lors de son séjour en France et pour les orientations qu'il nous a proposées, tant sur le plan théorique qu'expérimental . Nous lui exprimons notre sincère reconnaissance.

Nous remercions Monsieur le Professeur RAVILLY et Monsieur le Professeur VIVIER qui ont bien voulu nous faire l'honneur de participer au jury.

Nous adressons également nos remerciements à M. DOSGHEAS , Maître Assistant en Mécanique, pour l'aide précieuse qu'il nous a apportée.

Enfin, nous n'oublions pas d'adresser nos remerciements au personnel technique de l'E.N.S.M. , qui nous a aidé dans nos réalisations pratiques.

A mon frère Jean et à sa femme
en témoignage
de ma reconnaissance et de mon affection.

SOMMAIRE

- Introduction	page 1
Chapitre A Etude théorique	page 5
Chapitre B Dispositif expérimental	page 31
Chapitre C Etude de la masse liquide virtuelle et de l'amortissement	page 39
Chapitre D Vibrations de la surface libre du liquide	page 58
- Conclusion	page 85
Bibliographie	page 89

- INTRODUCTION -

L'étude des modes propres de vibrations des poutres et des membranes solides déformables et homogènes, placées dans l'air ou dans tout autre milieu compressible dont l'influence est négligeable sur les déformations des solides, a été traitée dans son ensemble par différents auteurs, et en particulier par Lord J.W.S. RAYLEIGH (the theory of sound).

Cependant, dans un certain nombre de cas, tels que l'étude des capacités, carènes, stabilisateurs, il devient nécessaire de connaître le comportement de ces éléments lorsqu'ils sont placés dans leurs conditions d'utilisation, c'est-à-dire en présence d'un fluide.

Des recherches sont actuellement entreprises dans ce sens, la condition précédente se traduisant expérimentalement en plaçant le solide au voisinage de la surface libre d'un fluide de façon telle qu'un seul élément de surface du solide soit en contact avec le liquide.

Dans le cadre de ces recherches, l'étude préliminaire du comportement de solides indéformables soumis à l'action de mouvements vibratoires, ainsi que la répercussion de ces mouvements sur celui de la surface libre du fluide, constituent l'objet de nos recherches.

Plus précisément, le présent travail, se rapporte à l'étude des vibrations verticales d'un solide de révolution (sphères ou cônes) au voisinage de la surface libre d'un liquide non visqueux et incompressible.

L'axe de révolution du solide et la surface libre du liquide au repos sont perpendiculaires.

Cette étude se scinde en deux parties distinctes :

a - Détermination expérimentale

- de la " masse liquide virtuelle" du solide partiellement ou totalement immergé. Cette grandeur définie par le Professeur Y. PIRONNEAU (dont nous reprenons la démonstration chapitre C.), représente l'augmentation "virtuelle" de masse généralement désignée par l'expression impropre "masse liquide entraînée".
- de l'amortissement du mouvement de ce solide

b - Etude de l'influence des vibrations du solide partiellement immergé, sur le mouvement de la surface libre du fluide.

La première partie de cette étude a pour but de vérifier les résultats théoriques établis par STOKES, et de noter en particulier l'influence de la surface libre du liquide sur la valeur des coefficients définissant la masse liquide virtuelle propre au solide, et l'amortissement.

De nombreux auteurs ont contribué à la vérification expérimentale de ces lois théoriques, dans le cas des solides totalement immergés, en utilisant généralement des systèmes pendulaires dont la fréquence d'oscillation est inférieure à 1 Hertz.

Ainsi, M.L. MARTY a établi les relations expérimentales permettant de déterminer, d'une part, la masse apparente d'une sphère (en fonction de son rayon, de la fréquence des oscillations et des amplitudes du mouvement), d'autre part, l'amortissement en fonction des mêmes paramètres.

Aux fréquences utilisées l'auteur note un désaccord notable entre ses résultats expérimentaux et les résultats théoriques.

Pour des grandes immersions (4 fois le rayon de la sphère), on constate que les résultats expérimentaux coïncident avec ceux obtenus par extrapolation de la relation due à M.L. MARTY. En outre, pour des fréquences supérieures à 5 Hertz, les résultats sont en parfait accord avec la loi théorique de STOKES - (masse liquide virtuelle et amortissement)-. Dans les deux cas, nous avons établi les variations de ces quantités en fonction de l'immersion des solides.

+ + +
+

La seconde partie de l'étude est consacrée au mouvement de la surface libre du fluide.

Le fluide, contenu dans un bassin, étant initialement au repos, l'écoulement est irrotationnel, et la vitesse de chaque particule fluide dérive d'un potentiel ϕ .

La fonction ϕ est une solution particulière de l'équation de LAPLACE, devant satisfaire aux différentes conditions limites imposées au fluide. La recherche de cette fonction (qui permet en outre de définir le mouvement de la surface libre) fait l'objet de notre étude théorique établie sous la direction du Professeur PLUNKETT.

+ + +
+

Des études se rapportant au mouvement de surface libre des fluides ont été effectuées par différents auteurs ; certaines de ces études présentent de nombreuses analogies avec le problème qui nous intéresse.

Notons :

- L'étude de VON HIZE, dans laquelle l'auteur traduit l'excitation du solide par une variation locale de pression sur la surface libre, et établit l'équation définissant le mouvement de cette surface. Cependant, certaines hypothèses, montrent que

cette solution n'est valable que dans le cas particulier où les ondes de propagation restent circulaires.

- Celle de B. BENJAMIN et F. URSELL, sur le mouvement de la surface libre d'un fluide contenu dans un bassin animé d'un mouvement d'ensemble sinusoïdal. La solution proposée reste valable dans notre cas particulier, mais ne permet pas d'explicitier la condition limite sur le contour du solide immergé.

- Enfin, les solutions proposées par Lord J.W.S. RAYLEIGH et H. LAMB, concernant le mouvement périodique des membranes solides. (Dans ce dernier cas, les conditions limites sur le contour et au centre de la membrane sont toutefois différentes).

+ + +
+

L'interprétation des résultats expérimentaux, orientée par le Professeur Y. PIRONEAU, a permis de mettre en évidence :

- Les différents modes de vibrations établis théoriquement :
 - ondes circulaires, symétriques par rapport à l'axe de vibration lorsque les amplitudes sont faibles (1° régime)
 - un système de vagues, présentant sur le contour immergé un nombre n , de maxima et de minima (2° régime)
- Le mouvement des particules fluides de la surface libre (matérialisées par une poudre très fine). Ce mouvement apparaît lorsque la surface libre vibre suivant le second mode pré-cité, et se traduit par un départ des particules sur les rayons aboutissant aux crêtes, et un retour sur les rayons aboutissant entre les deux crêtes.
- Les courbes définissant les amplitudes de changement de régime en fonction des fréquences d'excitation.
- Les points particuliers définis par une amplitude et une fréquence déterminées et permettant d'obtenir indifféremment le mode n ou le mode $n + 1$.
- L'influence de la forme géométrique des solides immergés, sur les modes de vibrations (essais d'une série de cônes).

+ + +
+

Les résultats expérimentaux obtenus en étudiant, d'une part, des sphères de diamètres différents, d'autre part, une série de cônes, nous ont conduit à poser, que lorsque la surface libre du fluide vibre suivant le second mode ($n \neq 0$), l'onde créée au voisinage du solide immergé est assimilable à une onde stationnaire.

Cette hypothèse étant admise, il devient possible de déterminer théoriquement la relation existant entre :

- la fréquence d'excitation N_n correspondant au mode n
- le nombre n
- le diamètre du solide immergé en contact avec la surface libre du fluide au repos.

La concordance des résultats théoriques calculés à partir de cette relation, et des résultats expérimentaux obtenus en étudiant le comportement des sphères et des cônes, confirme l'hypothèse pré-citée.

CHAPITRE A.

- E T U D E T H E O R I Q U E -

SOMMAIRE

I - INTRODUCTION

II - SYSTEMES DE REFERENCE

III - EQUATIONS GENERALES

- III₁ - Equation d'EULER
- III₂ - Equation de Continuité
- III₃ - Equation de LAPLACE
- III₄ - Equation de BERNOULLI

IV - CONDITIONS LIMITES

- IV₁ - Cas de la surface libre
- IV₂ - Condition sur le solide immergé
- IV₃ - Conditions sur les parois et le fond du bassin

V - SOLUTIONS PARTICULIERES DE L'EQUATION DE LAPLACE

VI - DETERMINATION DU POTENTIEL DES VITESSES

VII - AUTRES SOLUTIONS

- VII₁ - Cas des faibles amplitudes
- VII₂ - Cas des grandes amplitudes

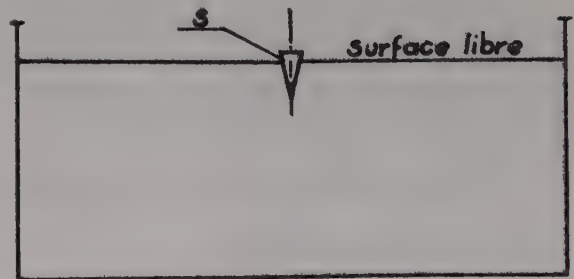
VIII - ETUDE DES TERMES DU SECOND ORDRE

- VIII₁ - Généralités
- VIII₂ - Amplitude du mouvement
- VIII₃ - Potentiel des vitesses
- VIII₄ - Détermination des lignes de vibrations

ETUDE THEORIQUE

I - INTRODUCTION

Un solide S de révolution autour d'un axe vertical, partiellement immergé dans un fluide non visqueux et incompressible est animé d'un mouvement vertical sinusoïdal de pulsation



Le fluide est contenu dans un bassin fixe dont les dimensions sont grandes par rapport à celles du solide S .

Le mouvement périodique de ce solide crée sur la surface libre du fluide des perturbations qui se traduisent suivant les valeurs de la fréquence et de l'amplitude de l'excitation, soit par un système d'ondes circulaires, soit par un système de vagues présentant un nombre n entier de maxima et de minima sur le contour immergé.

Ce chapitre se rapporte à l'étude du mouvement des particules fluides au voisinage de la surface libre et en particulier à la détermination de l'équation définissant cette surface en fonction du temps.

Le fluide étant initialement au repos, l'écoulement dû au mouvement de S peut être considéré comme irrotationnel, et nous admettrons l'existence d'un potentiel des vitesses défini par la fonction $\phi(x,y,z,t)$.

En chaque point du fluide, la vitesse et les déplacements d'une particule, ainsi que la pression en ce point, doivent satisfaire aux équations générales que nous rappelons dans le premier paragraphe : équations d'EULER et de BERNOULLI ainsi que l'équation de continuité.

Un second paragraphe est consacré à l'étude des conditions limites imposées au fluide, d'une part sur les parois et le fond du bassin, d'autre part sur le solide S .

Dans un dernier paragraphe nous examinons les solutions particulières proposées par différents auteurs ayant traité des problèmes similaires. En particulier la solution de VON HIZE pour les mouvements par ondes circulaires produits dans un liquide par des compressions périodiques ; et celle de BENJAMIN et URSELL relative au problème sur le mouvement périodique d'un liquide contenu dans un bassin animé d'un mouvement sinusoïdal vertical. Enfin, une solution particulière faisant intervenir les termes du second ordre des fonctions définissant l'amplitude de la surface libre et le potentiel des vitesses. La condition limite sur le

solide immergé étant fournie par les constatations expérimentales que nous avons pu établir du phénomène.

II - SYSTEMES DE REFERENCE

Dans le but de simplifier certaines expressions mathématiques, nous utilisons simultanément deux systèmes d'axes de références fixes par rapport au bassin

1 - un système d'axes cartésiens trirectangles O, x, y, z

2 - un système d'axes de coordonnées semi-polaires O, r, θ, z

Ces deux systèmes étant placés de façon telle que l'axe Oz soit vertical et orienté positivement suivant la verticale ascendante et que dans les deux cas l'équation de la surface libre au repos soit :

$$z = 0$$

celle du fond du bassin :

$$z = h < 0$$

Le point O est placé sur l'axe de symétrie de S .

Dans le premier système un point courant M pour coordonnées $M(x, y, z)$ et les composantes de la vitesse V_M de ce point sont :

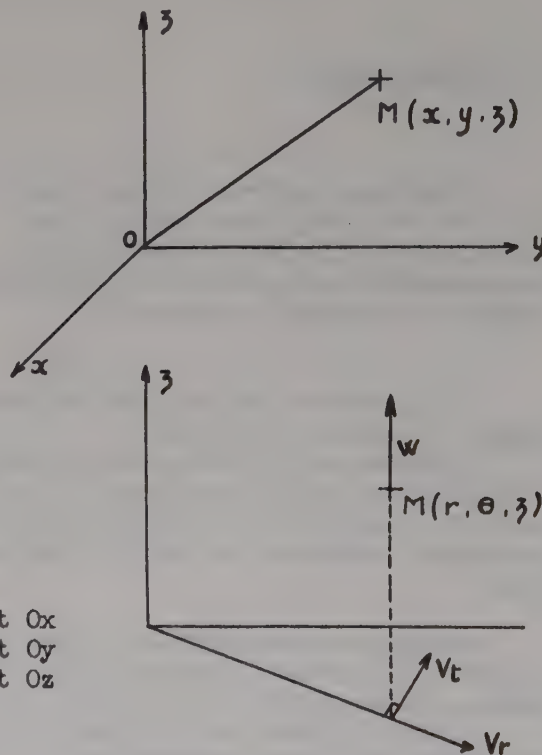
$$M \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

$$V_M \begin{vmatrix} U \text{ suivant } Ox \\ V \text{ suivant } Oy \\ W \text{ suivant } Oz \end{vmatrix}$$

dans le second système :

$$M \begin{vmatrix} r \\ \theta \\ z \end{vmatrix}$$

$$V_M \begin{vmatrix} V_r \text{ dans la direction de } Om \\ V_t \text{ dans la direction perpendiculaire} \\ W \text{ suivant } Oz \end{vmatrix}$$



III - EQUATIONS GENERALES

III₁ - Equations d'EULER

F_M , δ_M , et P_M désignant respectivement les forces de masse, l'accélération

et la pression agissant en un point M du fluide de densité ρ , à l'instant t , l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} (P_M) + \vec{F}_M = \vec{\sigma}_M \quad (3-1)$$

dans le cas particulier où les forces de masses sont dues à l'action de la pesanteur les équations d'EULER s'écrivent :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{d^2 x}{dt^2} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{d^2 y}{dt^2} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{d^2 z}{dt^2} = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned} \quad (3-2)$$

III₂ - Equation de continuité

L'équation de continuité traduit la conservation de la masse d'un élément fluide, elle s'écrit :

$$\text{dans le 1° repère :} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3-3)$$

$$\text{dans le second} \quad \frac{1}{r} V_r + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_t}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3-4)$$

III₃ - Equation de LAPLACE

Le fluide étant initialement au repos, l'écoulement peut être considéré comme irrotationnel, il existe alors un potentiel des vitesses

$\phi(x, y, z, t) = \phi(r, \theta, z, t)$ défini par la relation

$$\vec{V}_M = \text{grad } \phi \quad (3-5)$$

les composantes de la vitesse V_M sont alors :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} & V_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} & V_t &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ w &= \frac{\partial \phi}{\partial z} & W &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (3-6)$$

l'équation de continuité s'écrit alors :

$$\Delta \phi = 0$$

Le potentiel ϕ est donc une solution particulière de l'équation de LAPLACE qui s'écrit :

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{en repère cartésien} \quad (3-7)$$

alors qu'en repère cylindrique il vient :

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3-8)$$

Le potentiel des vitesses est donc une fonction harmonique. Nous donnerons dans un paragraphe suivant les solutions générales de cette équation dans le cas où le potentiel des vitesses peut être considéré comme un produit de fonctions à variables séparées :

$$X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

$$\text{ou} \quad R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot Z(z)$$

III₄ - Équation de BERNOULLI

Lorsque l'écoulement est irrotationnel et le fluide incompressible l'intégration de l'équation du mouvement (3-1) fournit l'équation de BERNOULLI

$$\frac{P_M}{\rho} + gz + \frac{1}{2} (V_M)^2 + \frac{\partial \phi}{\partial t} = H(t) \quad (3-9)$$

où H est une fonction du temps seulement.

Le potentiel des vitesses est donc défini à une fonction additive de t près. Un changement de variable ramène l'équation à la forme généralement utilisée

$$\frac{P_M}{\rho} + gz + \frac{1}{2} (V_M)^2 + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (3-10)$$

$$\text{avec :} \quad (V_M)^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \quad (3-11)$$

pour la surface libre il vient avec $z = \eta$

$$\frac{P_M}{\rho} + g\eta + \frac{1}{2} (V_M)^2 + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (3-12)$$

En tenant compte de la tension superficielle δ les auteurs T.B. BENJAMIN et F. URSELL montrent que l'équation peut se ramener à la forme :

$$\frac{1}{2} (V_M)^2 + \frac{\delta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} + g\eta = 0 \quad (3-13)$$

la pression en un point de la surface libre étant donnée par la relation :

$$P_M = \delta (\sigma_1 + \sigma_2)$$

σ_1 et σ_2 désignant les rayons de courbures principaux au point considéré.

En première approximation, il est possible de négliger ces termes ainsi que les carrés des vitesses U^2 , V^2 , W^2 devant les autres termes. L'équation de BERNOULLI se ramène alors à l'expression :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} + g \eta = 0 \quad (3 - 14)$$

IV - CONDITIONS LIMITES

Les conditions limites sont imposées en chaque point des surfaces limitant le volume fluide : bassin, solide S et surface libre.

La condition cinématique impose à la vitesse de chaque particule fluide d'être contenue dans le plan tangent à la surface.

Si $F(x,y,z,t)$ ou $F(r,\theta,z,t)$ désigne l'équation d'une surface limite (fixe ou mobile) cette condition se traduit par l'équation :

$$\frac{dF}{dt} = 0 \quad (4 - 1)$$

sachant que :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

nous obtenons dans chacun des systèmes :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (4 - 2)$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

IV₁ - Cas de la surface libre

t désignant le temps, l'équation de la surface libre sera représentée par :

$$z = \eta(x,y,t)$$

Cette fonction peut être mise sous la forme :

$$F(x,y,z,t) = z - \eta(x,y,t) = 0 \quad (4 - 3)$$

Ainsi, il vient :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1$$

En reportant dans (4 - 2), nous obtenons :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (4 - 4)$$

et
$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (4 - 5)$$

En utilisant pour cette équation la même approximation que pour l'équation de BERNOULLI, nous obtenons :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (4 - 6)$$

IV₂ - Condition sur le solide immergé S

Le solide immergé étant de révolution, son équation est de la forme :

$$G(r, \theta, z, t) = r - R(z, t) = 0 \quad (4 - 7)$$

En reportant dans l'équation (4 - 2), il vient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial t} = 0 \quad (4 - 8)$$

Cette relation traduit la condition de tangence de la vitesse du fluide sur le solide S.

IV₃ - Conditions sur les parois et sur le fond du bassin

Les équations des parois verticales du bassin seront respectivement :

$$x = \pm L \quad F = x \pm L = 0$$

$$y = \pm L \quad F = y \pm L = 0$$

Les axes fixes étant placés au centre de la section droite carrée de côté 2L

l'équation du fond est : $z = h < 0 \quad F = z - h = 0$

En reportant ces expressions dans (4 - 2), nous obtenons successivement :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{soit dans chacun des cas} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (4 - 9)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad n \text{ étant la normale à la surface}$$

V - SOLUTIONS PARTICULIERES VERIFIANT L'EQUATION DE LAPLACE

V₁ - Généralités

Soit ϕ la fonction définissant le potentiel des vitesses . Cette fonction doit vérifier la condition de LAPLACE

$$\Delta \phi (r, \theta, z, t) \equiv \Delta \phi (x, y, z, t) = 0$$

$$\text{soit :} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5 - 1)$$

La fonction ϕ devant être entièrement déterminée et d'une manière unique par les conditions limites, nous recherchons une solution de la forme :

$$\phi(r, \theta, z, t) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot Z(z) \cdot T(t) \quad (5 - 2)$$

R, Θ , Z, T, étant des fonctions d'une seule variable r, θ , z, t.

L'équation de LAPLACE permet de déterminer un ensemble de solutions particulières pour R, Θ , et Z. Les conditions aux limites, ainsi que les deux autres précédemment citées, assurant l'unicité de la solution.

V₂ - Solutions particulières

La fonction ϕ se présentant sous la forme proposée, après substitution dans l'équation de LAPLACE et division par la produit R. Θ .Z. nous obtenons l'équation générale :

$$\frac{1}{R} \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \frac{1}{\Theta} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \right] + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (5 - 3)$$

dans laquelle nous allons étudier chaque membre.

Les deux premiers termes étant indépendants de z, il doit en être de même pour le troisième, ce qui nous conduit à poser :

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \pm \alpha^2 \quad (5 - 4)$$

étant une constante quelconque.

Suivant le signe qui précède α^2 nous obtenons les solutions :

$$\frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} = +\alpha^2 \quad Z = A_1 e^{\alpha z} + B_1 e^{-\alpha z} \quad \text{ou} \quad Z = A_1 \cosh \alpha z + B_1 \sinh \alpha z \quad (5-5)$$

$$\frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\alpha^2 \quad Z = A_2 \cos \alpha z + B_2 \sin \alpha z \quad (5-6)$$

$$\frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad Z = A_3 z + B_3$$

A_i et B_i ($i = 1, 2, 3$) étant des constantes arbitraires à déterminer.

Un raisonnement analogue appliqué à la fonction θ se traduit par la relation :

$$\frac{1}{\theta} \cdot \frac{d^2 \theta}{d\theta^2} = \pm n^2 \quad (5-7)$$

dont les solutions particulières seront :

$$\frac{1}{\theta} \cdot \frac{d^2 \theta}{d\theta^2} = +n^2 \quad \theta = C_1 \cosh n\theta + D_1 \sinh n\theta \quad (5-8)$$

$$\frac{1}{\theta} \cdot \frac{d^2 \theta}{d\theta^2} = -n^2 \quad \theta = C_2 \sin n\theta + D_2 \cos n\theta \quad (5-9)$$

$$\frac{1}{\theta} \cdot \frac{d^2 \theta}{d\theta^2} = 0 \quad \theta = C_3 \theta + D_3 \quad (5-10)$$

dans le cas des oscillations d'un solide de révolution en milieu infini, la fonction θ doit reprendre la même valeur pour θ et $\theta + 2k$, le nombre n doit donc être un nombre entier.

Lorsque $n = 0$ nous obtenons une solution se rapportant à un phénomène présentant une symétrie de révolution. C'est le cas des oscillations de la sphère aux faibles amplitudes, les ondes de propagation étant circulaires. La fonction θ dans ce cas particulier doit être indépendante de la valeur de θ

Cette condition se traduit dans (5-10) par :

$$C_3 = 0 \quad \theta = D_3 = \text{constante} \quad (5-11)$$

L'équation dépendant de la variable r est obtenue en reportant (5-4) et (5-7) dans l'équation générale de LAPLACE. Il vient :

$$\frac{1}{R} \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \frac{1}{r^2} \left[\pm n^2 \right] \pm \alpha^2 = 0 \quad (5 - 12)$$

soit :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + R \left[\pm \alpha^2 \pm \frac{n^2}{r^2} \right] = 0 \quad (5 - 13)$$

dont les solutions particulières sont :

1er cas

$$n^2 \text{ précédé du signe } - \quad (5 - 9)$$

$$\frac{1 - 1}{\alpha^2} \text{ précédé du signe } + \quad (5 - 5)$$

$$R = A_1 J_n(\alpha r) + B_1 Y_n(\alpha r) \quad (5 - 14)$$

J_n et Y_n étant les fonctions de BESSEL de première et seconde espèce d'ordre n .

$$\frac{1 - 2}{\alpha^2} \text{ précédé du signe } - \quad (5 - 6)$$

$$R = A_2 I_n(\alpha r) + B_2 K_n(\alpha r) \quad (5 - 15)$$

I_n et K_n étant les fonctions de BESSEL modifiées

2ème cas

$$n = 0$$

Les solutions correspondent aux amplitudes faibles donnant lieu à des ondes circulaires.

$$\frac{2 - 1}{\alpha^2} \text{ précédé du signe } +$$

$$R = A J_0(\alpha r) + B Y_0(\alpha r) \quad (5 - 16)$$

$$\frac{2 - 2}{\alpha^2} \text{ précédé du signe } -$$

$$R = A' I_0(\alpha r) + B' K_0(\alpha r) \quad (5 - 17)$$

3ème cas

n^2 précédé du signe $+$ conduit à des fonctions de BESSEL à indice imaginaire.

VI - DETERMINATION DE LA FONCTION $\phi(r, \theta, z, t) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot Z(z) \cdot T(t)$

VI₁ - Fonction Z

Dans la direction de l'axe Oz, la vitesse du fluide doit être nulle pour une profondeur h (4 - 9) - h étant grand par rapport aux dimensions du solide S immergé, nous sommes conduits à prendre pour la fonction Z une solution de la forme :

$$Z(z) = e^{\alpha z} \quad (6-1)$$

$$e^{\alpha h} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad h \rightarrow \infty$$

qui correspond à celle donnée par la relation (5 - 5)

VI₂ - Fonction Θ

La solution de la fonction Θ doit permettre d'obtenir par rapport à l'axe Oz une symétrie de répétition d'ordre n (phénomène observé expérimentalement) soit une solution de la forme :

$$\Theta = e^{in\theta} \quad (6-2)$$

correspondant à la formule (5 - 9) n^2 précédé du signe -

une solution particulière sera donc :

$$\Theta = \sin n\theta \quad \text{ou} \quad \cos n\theta \quad (6-3)$$

notons que WITOSZYNSKIEGO a donné des solutions très complètes des intégrales particulières de l'équation de LAPLACE dans le cas où la fonction

$$\Theta = e^{\lambda\theta} \quad \lambda \text{ étant un nombre réel}$$

VI₃ - Fonction R

La solution de R est fournie par l'équation de LAPLACE et doit satisfaire aux deux conditions précédentes, soit : (formule 5 - 14)

$$R = A J_n(\alpha r) + B Y_n(\alpha r) \quad (6-4)$$

une solution particulière étant :

$$R = A J_n(\alpha r)$$

VI₄ - Fonction T

Les équations (3 - 14) $\eta + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

$$\text{et} \quad (4 - 6) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

permettent d'obtenir, en dérivant la première par rapport au temps et en reportant dans la seconde, la relation :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (6 - 5)$$

et en tenant compte de (6 - 1)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g^{\alpha} \phi = 0 \quad (6 - 6)$$

dont une solution particulière est :

$$T = \sin \omega t \quad \text{avec} \quad (6 - 7)$$

$$\omega^2 = g^{\alpha} \quad (6 - 8)$$

VI₅ - Fonction ϕ

Une solution particulière pour la fonction ϕ est donc :

$$\phi(r, \theta, z, t) = A \cdot J_n(\alpha r) \cdot \cos n \theta \cdot \sin \omega t \cdot e^{\alpha z} \quad (6 - 9)$$

et au voisinage de la surface libre $z = 0$

$$\phi(r, \theta, t) = A \cdot J_n(\alpha r) \cdot \cos n \theta \cdot \sin \omega t \quad (6 - 10)$$

VI₆ - Détermination de α

La relation (4 - 8) (condition limite sur le contour immergé) nous permet de déterminer la valeur de α

Dans le cas particulier où le solide S est un cylindre, ou une sphère à demi-immergée, l'équation (4 - 7) s'écrit :

$$r = R = \text{constant} \quad (6 - 11)$$

(4 - 8) donne alors :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=R} = 0 \quad (6 - 12)$$

En prenant pour fonction ϕ la valeur trouvée en (6 - 10) nous obtenons :

$$J'_n(\alpha R) = 0 \quad (6 - 13)$$

$m.n R$ définissant le $m^{\text{ième}}$ zéro de la fonction de BESSEL J'_n , à cette valeur correspond un mode de vibration m, n

avec n nombre de maxima sur le contour immergé
 m nombre de zéro entre l'origine et le rayon R , car (3 - 14) donne pour

la fonction définissant les amplitudes de la surface libre une forme analogue à la fonction ϕ .

La valeur de α étant ainsi déterminée, la pulsation propre correspondante sera donnée par (6 - 8)

$$\omega_{mn}^2 = g \alpha_{mn} \quad (6 - 14)$$

VI - Conclusions

Les équations (6 - 10) et (3 - 14) nous montrent que pour toutes les fréquences d'excitation du solide immergé, les valeurs nulles de l'amplitude η du mouvement de la surface libre sont données par les valeurs de (αr) qui annulent les fonctions de BESSEL $J_n(r)$

$$\text{posons } \alpha r = x$$

pour x tendant vers $+\infty$ les fonctions $J_n(x)$ prennent les formes asymptotiques

$$J_n(x) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[x - \left(2n + 1 \right) \frac{\pi}{4} \right] \quad (6 - 15)$$

les zéros de ces fonctions sont donnés par la relation

$$x - (2n + 1) \frac{\pi}{4} = (2k - 1) \frac{\pi}{2} \quad \text{avec } k = 1, 2, 3, \dots, i$$

soit :

$$x = \left[k + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \right] \pi$$

on remarque que la différence entre deux zéros consécutifs d'une même fonction, tend vers π lorsque leurs rangs deviennent notables

$$\text{ainsi : } \alpha (r_i - r_{i-1}) \longrightarrow \pi \quad (6 - 16)$$

ω_n désignant la pulsation propre correspondant au mode n , nous avons :

$$\alpha = \frac{\omega_n^2}{g} = \frac{4\pi^2 N_n^2}{g}$$

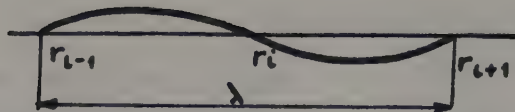
$$\text{avec } N_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad \text{fréquence correspondant à la pulsation propre}$$

en reportant dans (6 - 16), il vient :

$$r_i - r_{i-1} = \frac{g}{4\pi N_n^2} \quad (6 - 17)$$

une longueur d'onde λ est égale au double de l'intervalle séparant deux zéros consécutifs

$$\lambda = 2 (r_i - r_{i-1})$$



d'où la valeur de la longueur d'onde

$$\lambda = \frac{g}{2 \pi N_n^2} \quad (6 - 18)$$

dans le système MKS nous obtenons :

$$\lambda = \frac{1,56}{N_n^2}$$

désignons par N la fréquence d'oscillation de l'onde créée par le solide immergé et par F la fréquence d'excitation du système

Expérimentalement nous avons observé que :

dans le cas où $n = 0$

$$N = F$$

et lorsque $n \neq 0$

$$N = \frac{F}{2}$$

ainsi $N = N_n$ dans le cas particulier où la fréquence d'excitation F est égale au double de celle correspondant au mode n .

En fait N est très voisine de N_n , car les fréquences $N_n - 1$, N_n et $N_n + 1$ sont très voisines quelle que soit la valeur de n

$$N \neq N_n \quad (6 - 19)$$

Dans la théorie des ondes trochoïdales de GERSTNER, la période d'oscillation d'une houle est donnée en fonction de la longueur d'onde par la relation

$$T = \sqrt{\frac{2 \pi \lambda}{g}}$$

d'où la valeur de la longueur d'onde en fonction de la fréquence

$$\lambda = \frac{g}{2 \pi N^2} \quad (6 - 20)$$

nous obtenons une relation identique à la relation (6 - 17) en tenant compte de (6 - 19).

Ainsi, en milieu infini, l'onde drée par l'excitation d'un solide partiellement immergé devient rapidement assimilable à une houle droite trochoïdale, et se propage dans les mêmes conditions que cette dernière.

Pour une fréquence d'excitation, F , déterminée, le mode de vibration de la surface libre ne dépend que des conditions limites sur le contour du solide immergé.

VII - AUTRES SOLUTIONS

VII₁ - Cas des faibles amplitudes - Solution de VON HIZE

Dans ce cas particulier, l'auteur traduit le mouvement oscillatoire du solide S par une variation de pression sur la surface libre en posant

$$P = P_0(r) e^{i\sigma t} \quad (7-1)$$

au temps $t = 0$ la surface libre est plane, le potentiel des vitesses est constant, nous pouvons donc poser

$$\begin{aligned} t = 0, \quad r = 0 \quad P_0(r) &= p\phi \\ \eta &= 0 \end{aligned} \quad (7-2)$$

η désignant l'amplitude du mouvement de la surface libre
 ρ la masse spécifique du fluide

En reportant (7-1) dans l'équation de BERNOULLI et en tenant compte de la condition imposée au fluide sur la surface libre (4-6), il vient :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = - \frac{i\sigma}{\rho} P_0(r) e^{i\omega t} \quad (7-3)$$

Les conditions limites étant les mêmes que celles citées au paragraphe précédent, la fonction définissant le potentiel des vitesses est de la forme :

$$\phi = e^{\alpha z} \cdot J_0(\alpha r) \cdot T(t) \quad (7-4)$$

car dans le cas des faibles amplitudes, le système d'ondes est circulaire et de révolution autour de l'axe de vibration.

En reportant cette valeur dans (7-3) et après simplification, il vient

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + g\alpha T = - i\sigma \cdot k \cdot e^{i\omega t} \quad (7-5)$$

avec $k = T(t=0)$

En posant $\omega_0^2 = g\alpha$

l'auteur obtient, compte tenu de la condition (7-2), et en supprimant les termes correspondants au mouvement transitoire, une solution de la forme

$$\phi = -e^{\alpha z} \cdot J_0(\alpha r) \cdot k i \sigma \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \sigma^2}$$

soit

$$\eta = \frac{-k e^{i\sigma t}}{g} \left(\frac{1 + \sigma^2}{\omega_0^2 - \sigma^2} \right) e^{\alpha z} \cdot J_0(\alpha r) \quad \text{avec } z = 0$$

Conclusion

Si cette fonction reste valable pour des amplitudes faibles ($n = 0$) elle devient inacceptable lorsque $n \neq 0$, car il est alors impossible de simplifier l'équation (7 - 3), $P_0(r)$ ne pouvant plus être proportionnel à $J_n(\alpha r)$, cette dernière fonction étant nulle pour $r = 0$.

Dans le sous-paragraphe suivant, nous examinons donc la solution proposée par BENJAMIN et URSELL pour le mouvement à grandes amplitudes dans leur étude sur le mouvement des liquides contenus dans des bassins animés d'un mouvement périodique.

VII₂ - Cas des grandes amplitudes (T.B. BENJAMIN et F. URSELL)

Les auteurs étudient le mouvement d'un liquide contenu dans un bassin animé d'un mouvement sinusoïdal, et proposent pour le mouvement de la surface libre du liquide une solution se présentant sous la forme d'une série

$$\eta(x, y, t) = \sum_0^{\infty} a_m(t) \cdot S_m(x, y) \quad (7 - 6)$$

L'écoulement étant irrotationnel, les équations générales sont identiques à celles exposées au paragraphe III, $S_m(x, y)$ est donc une fonction harmonique satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 S_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_m}{\partial y^2} + k_m^2 S_m(x, y) = 0$$

La fonction définissant le potentiel des vitesses sera :

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_0^{\infty} b_m(t) S_m(x, y) \cdot Z(z) \quad (7 - 7)$$

$b_m(t)$ et $Z(z)$ sont définies par les conditions

$$\Delta \phi = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{pour } z = h \quad (\text{fond du bassin}) \quad (7 - 8)$$

et

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{pour } z = 0 \quad (\text{surface libre})$$

tous calculs faits

$$\phi = - \sum_0^{\infty} \frac{da_m(t)}{dt} \cdot \frac{Ch k_m (h-z)}{k_m \cdot Sh \cdot k_m h} S_m(x, y) \quad (7 - 9)$$

en reportant cette valeur (7 - 9) dans l'équation de BERNOULLI, nous obtenons :

$$\sum_0^{\infty} \frac{S_m(x, y)}{k_m th k_m h} \left[\frac{d^2 a_m}{dt^2} + (g k_m th k_m h) a_m \right] = 0 \quad (7 - 10)$$

lorsque la profondeur h du bassin est grande par rapport aux amplitudes du mouvement étudié

$$tg \, km \, h \longrightarrow 1$$

et l'équation (7 - 10) s'écrit

$$\frac{d^2 a_m}{dt^2} + g \, km \cdot a_m = 0 \quad (7 - 11)$$

notons que dans le cas étudié, par les auteurs pré-cités, l'ensemble du fluide est soumis à une accélération $(g - f \cos \omega t)$, le second terme correspondant au mouvement d'excitation du bassin.

L'équation (7 - 11) prend alors la forme d'une équation de MATHIEU.

Dans notre cas, nous obtenons avec l'équation (7 - 11) une forme identique à la relation (6 - 6)

$$\text{les coefficients } a_m(t) = \frac{\sin}{\cos} \omega t$$

$$\text{avec : } \omega^2 = g \, km \equiv g \, \alpha \, m$$

Conclusion

Les solutions particulières proposées dans les paragraphes précédents ont été établies en négligeant, dans l'équation de BERNOULLI d'une part et dans l'équation de continuité d'autre part, les termes de second ordre.

Cette approximation reste valable pour des faibles déformations de la surface libre. Or expérimentalement nous avons observé que pour certaines fréquences, une amplitude d'excitation relativement faible (2mm environ) pouvait créer au voisinage du solide des variations importantes de niveaux (12 à 14 mm). Il nous semble donc intéressant, dans un dernier paragraphe de faire intervenir dans les équations précédentes tous les termes, et d'étudier en conséquence les nouvelles solutions.

VIII - ETUDE DES TERMES DU SECOND ORDRE

VIII₁ - Généralités

Dans cette étude la fonction définissant le potentiel des vitesses est prise sous la forme

$$\phi = \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + \dots \epsilon^n \phi_n \quad (8 - 1)$$

les amplitudes du mouvement de la surface libre

$$\eta = \eta_0 + \epsilon \eta_1 + \dots \epsilon^n \eta_n$$

ϕ étant le potentiel des vitesses correspondant à un mode de vibrations déter-

miné, c'est-à-dire correspondant à une valeur n de maxima donné.

En reportant ces valeurs dans l'équation de BERNOULLI et dans l'équation traduisant la condition cinématique sur la surface libre, nous avons (J.J. STOKER Ref. 6) en limitant les développements aux termes du second ordre

$$g\eta_1 + \frac{\partial\phi_1}{\partial t} = 0 \quad \text{pour } z = 0 \quad (8-2)$$

$$g\eta_2 - \frac{\partial\phi_2}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial \theta} \right)^2 - \eta_1 \frac{\partial^2\phi_1}{\partial t \partial \gamma} \right] \quad (8-3)$$

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial t} - \frac{\partial\phi_1}{\partial z} = 0 \quad (8-4)$$

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial t} - \frac{\partial\phi_2}{\partial z} = - \frac{\partial\phi_1}{\partial r} \cdot \frac{\partial\eta_1}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\phi_1}{\partial \theta} \frac{\partial\eta_1}{\partial \theta} + \frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2} \eta_1 \quad (8-5)$$

nous avons en (8-2) et (8-4) les formules obtenues dans le paragraphe précédent

ϕ_1 est donc défini par

$$\phi_1 = A e^{\alpha z} \cos \omega t \cdot \cos n\theta \cdot V_n(\alpha r)$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{\omega^2}{g} \quad (8-6)$$

$$\text{et } V_n(\alpha r) = C J_n(\alpha r) + D Y_n(\alpha r)$$

A, C, et D sont des constantes à déterminer par les conditions limites.

Les équations (8-6) et (8-2) permettent de calculer les dérivées partielles des fonctions η et ϕ par rapport aux variables z, t, θ, r .

reportons ces valeurs dans (8-3) et (8-5) :

$$\begin{aligned} -2 \left(g\eta_2 + \frac{\partial\phi_2}{\partial t} \right) = & V'^2 \alpha^2 A^2 e^{2\alpha z} \cos^2 \omega t \cos^2 n\theta + V^2 A^2 e^{2\alpha z} \left[\alpha^2 \cos^2 \omega t \cos^2 n\theta + \right. \\ & \left. \frac{n^2}{r^2} \cos^2 \omega t \sin^2 n\theta - 2 \alpha^2 \sin^2 \omega t \cos^2 n\theta \right] \quad (8-7) \end{aligned}$$

$$\text{et } \frac{\partial\eta_2}{\partial t} - \frac{\partial\phi_2}{\partial z} = -V'^2 \frac{\omega \alpha^2}{g} A^2 e^{2\alpha z} \sin \omega t \cos \omega t \cos^2 n\theta -$$

$$V^2 \left(\frac{\omega n^2}{r^2 g} \sin^2 n\theta - \frac{\omega \alpha^2}{g} \cos^2 n\theta \right) A^2 e^{2\alpha z} \sin \omega t \cos \omega t$$

$$(8-8)$$

VIII₂ - Amplitude du mouvement

Afin de déterminer les constantes A, C et D, nous pouvons calculer la valeur de η pour $r = a$ (rayon du solide immergé au voisinage de la surface libre) et assimiler l'équation obtenue à celle d'une onde stationnaire (résultat obtenu expérimentalement et que nous avons pu vérifier par le calcul de n dans le paragraphe D)

A cet effet dérivons (8 - 7) et (8 - 8) respectivement par rapport à z et t après addition, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \frac{\partial \eta_2}{\partial z} + \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial t^2} = & -V'^2 A^2 e^{2\alpha z} \alpha^3 \cos^2 n\theta \frac{3 \cos 2\omega t + 1}{2} + V^2 A^2 e^{2\alpha z} \left[\right. \\ & \left. \cos 2\omega t \left(\frac{\alpha n^2}{2r^2} \sin^2 n\theta - \frac{5}{2} \alpha^3 \cos^2 n\theta \right) + \frac{1}{2} \left(\alpha^3 \cos^2 n\theta - \frac{\alpha n^2}{r^2} \sin^2 n\theta \right) \right] \quad (8 - 9) \end{aligned}$$

en exprimant $\cos^2 n\theta$ et $\sin^2 n\theta$ en fonction de l'angle $2n\theta$, nous obtenons après avoir regroupé les termes :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \frac{\partial \eta_2}{\partial z} + \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial t^2} = & \frac{\cos 2n\theta}{2} \left[\left(-\frac{3}{2} V'^2 \alpha^3 - \frac{5}{2} V^2 \alpha^3 - V^2 \frac{\alpha n^2}{2r^2} \right) A^2 e^{2\alpha z} \cos 2\omega t + \right. \\ & \left. \left(-\frac{1}{2} V'^2 \alpha^3 + \frac{1}{2} V^2 \alpha^3 + V^2 \frac{\alpha n^2}{2r^2} \right) A^2 e^{2\alpha z} \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{3}{2} V'^2 \alpha^3 - \frac{5}{2} V^2 \alpha^3 + \frac{V^2 \alpha n^2}{2r^2} \right) A^2 e^{2\alpha z} \cos 2\omega t + \right. \\ & \left. \left(-\frac{1}{2} V'^2 \alpha^3 + \frac{1}{2} V^2 \alpha^3 + \frac{-V^2 \alpha n^2}{2r^2} \right) A^2 e^{2\alpha z} \right] \quad (8 - 10) \end{aligned}$$

Cette équation (8 - 10) se présente donc sous la forme générale :

$$\mathcal{G} \frac{\partial \eta_2}{\partial z} + \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial t^2} = \cos 2\omega t \cdot F_1(r, \theta) e^{2\alpha z} + F_2(r, \theta) e^{2\alpha z} \quad (8 - 11)$$

la solution de l'équation sans second membre est :

$$\begin{aligned} e^{\beta z} (A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t) \quad \text{avec} \\ \mathcal{G} \beta = \omega_1^2 \end{aligned}$$

ces termes correspondant au mouvement transitoire, une solution particulière de l'équation avec second membre est :

$$\eta_2 = f_1(r, \theta) \cos 2\omega t e^{\beta z} + f_2(r, \theta) e^{\beta z} \quad (8 - 12)$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial t^2} = -4 \omega^2 f_1 \cos 2 \omega t e^{\beta z}$$

et

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial z} = \beta \left[f_1(r, \theta) \cos 2 \omega t e^{\beta z} + f_2(r, \theta) e^{\beta z} \right] \quad (8 - 13)$$

en reportant ces valeurs dans (8 - 11) et en identifiant, nous obtenons :

$$\beta = 2\alpha$$

$$f_1 = \frac{F_1(r, \theta)}{g\beta - 4\omega^2} = \frac{-F_1(r, \theta)}{2\omega^2}$$

$$f_2 = \frac{1}{g\beta} F_2(r, \theta) = \frac{F_2(r, \theta)}{2\omega^2} \quad (8 - 14)$$

l'équation (8 - 12) s'écrit alors pour $z = 0$

$$\begin{aligned} \eta_2 = & -\frac{1}{2\omega^2} \frac{\cos 2n\theta}{2} \left[\left(-\frac{3}{2} V'^2 \alpha^3 - \frac{5}{2} V^2 \alpha^3 - \frac{V^2 \alpha n^2}{2r^2} \right) \cos 2\omega t \right. \\ & \left. - \left(-\frac{1}{2} V'^2 \alpha^3 + \frac{1}{2} V^2 \alpha^3 + \frac{V^2 \alpha n^2}{2r^2} \right) \right] A^2 \\ & - \frac{1}{2\omega^2} \cdot \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{3}{2} V'^2 \alpha^3 - \frac{5}{2} V^2 \alpha^3 + \frac{V^2 \alpha n^2}{2r^2} \right) \cos 2\omega t \right. \\ & \left. - \left(-\frac{1}{2} V'^2 \alpha^3 + \frac{1}{2} V^2 \alpha^3 - \frac{V^2 \alpha n^2}{2r^2} \right) \right] A^2 \quad (8 - 15) \end{aligned}$$

Compte tenu des valeurs trouvées dans les formules (8 - 2) et (8 - 6), l'équation générale de η limitée aux termes du second ordre est :

$$\begin{aligned} \eta = & \frac{\omega}{g} A \sin \omega t \cdot \cos n\theta \cdot V \\ & + \frac{A^2}{4\omega^2} \cos 2\omega t \cos 2n\theta \left[\left(-\frac{3}{2} V'^2 \alpha^3 + \frac{5}{2} V^2 \alpha^3 + \frac{V^2 \alpha n^2}{2r^2} \right) \right] \\ & + \frac{A^2}{4\omega^2} \cos 2n\theta \left[\left(-\frac{1}{2} V'^2 \alpha^3 + \frac{1}{2} V^2 \alpha^3 + \frac{V^2 \alpha n^2}{2r^2} \right) \right] \quad (8 - 16) \end{aligned}$$

Les termes suivants de la formule (8 - 15) étant indépendants de θ correspondent à une oscillation verticale du plan moyen de η autour d'une position différente de la position initiale de la surface libre.

Dans (8 - 16) apparaît un terme indépendant du temps

$$\frac{A^2}{4 \omega^2} \cos 2 n \theta \left[\left(-\frac{1}{2} V'^2 \alpha^3 + \frac{1}{2} V^2 \alpha^3 + \frac{V^2 \alpha n^2}{2 r^2} \right) \right]$$

La symétrie du système étudié (solide de révolution) implique que ce terme soit nul - Nous obtenons ainsi une première relation

$$-\frac{1}{2} V'^2 \alpha^3 + \frac{1}{2} V^2 \alpha^3 + \frac{V^2 \alpha n^2}{2 r^2} = 0 \quad (8 - 17)$$

qui, traduite dans (8 - 16), nous donne :

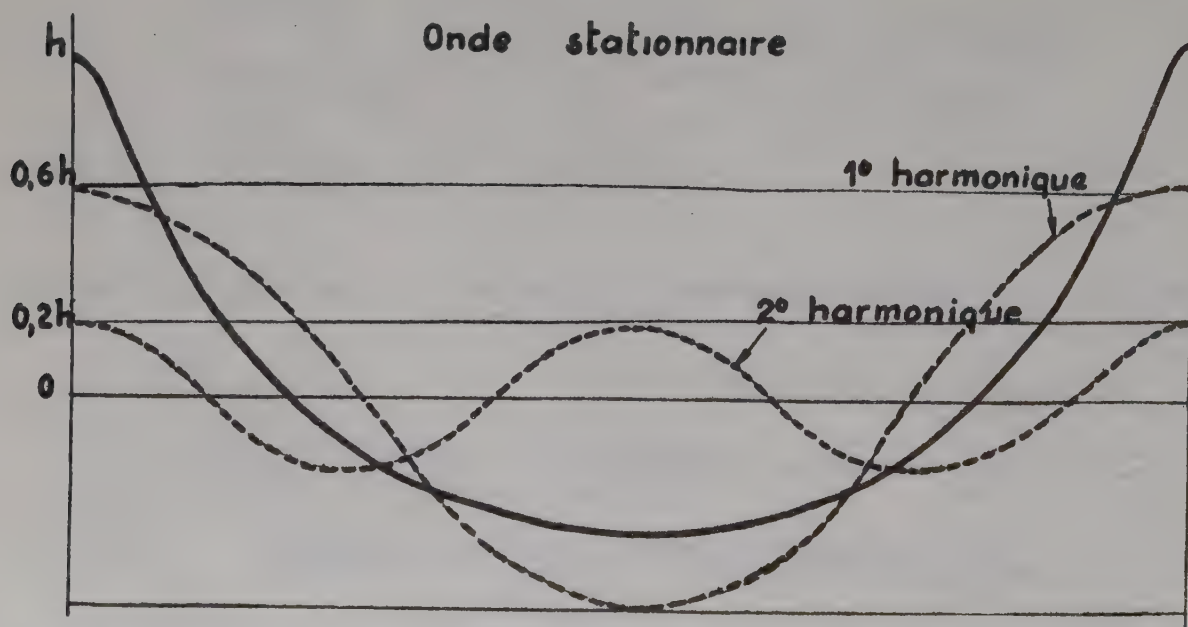
$$\eta = \frac{\omega}{g} A \sin \omega t \cos n \theta \cdot V + \frac{A^2 \alpha^3}{2 \omega^2} \cos 2 \omega t \cos 2 n \theta (V'^2 + V^2) \quad (8 - 18)$$

Cette valeur théorique de η peut être comparée à la valeur expérimentale que nous avons admise par hypothèse (chapitre D parag. VI) et qui représente celle d'une onde stationnaire.

La valeur maximum de η sera obtenue en valeur absolue pour

$$\sin \omega t = \cos 2 \omega t$$

$$\text{soit :} \quad \omega t = \frac{3\pi}{2} + 2 k\pi$$



Le plan ci-dessus représente la courbe définissant une onde stationnaire identique à celle représentée chapitre D parag. III (seules les échelles de coordonnées sont modifiées) lorsque cette dernière atteint une hauteur h maximum.

La décomposition de la fonction traduisant cette onde en série de FOURIER nous donne :

$$F(\theta) = 0,6 h \cos n \theta + 0,2 h \cos 2 n \theta + 0,08 h \cos 3 n \theta + 0,04 h \cos 4 n \theta \quad (8 - 19)$$

Par identification, nous obtenons en limitant les développements aux termes du second ordre (8 - 18) $\equiv$ (8 - 19)

$$\frac{2 g^2}{3 A \omega^3} \cdot \frac{V(\alpha a)}{[V'^2(\alpha a) + V^2(\alpha a)]} - 1 = 0 \quad (8 - 20)$$

a désignant le rayon du solide immergé en contact avec la surface libre du fluide

La troisième équation qui, associée à (8 - 20) et (8 - 17) permettra de déterminer les constantes A, C et D, sera fournie par la condition :

$$\eta_{\text{maximum}} = h \quad \text{hauteur de crête}$$

Théoriquement, nous avons la possibilité de déterminer cette hauteur h, Cette dernière étant fonction de l'amplitude de vibration du solide, de sa forme et de la viscosité du fluide.

La stabilité du système permet une détermination expérimentale de cette quantité, néanmoins la précision des mesures reste très incertaine.

VIII₃ - Potentiel des vitesses - termes du second ordre

Pour déterminer les termes du second ordre de la fonction définissant le potentiel des vitesses, dérivons (8 - 7) par rapport au temps, et reportons la valeur de $\frac{\partial \eta_z}{\partial t}$ ainsi trouvée dans (8 - 8)

Tous calculs faits, nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_z}{\partial z} = e^{2\alpha z} \sin 2\omega t \left[V'^2 A^2 \alpha^2 \omega \cos^2 n \theta + V^2 A^2 \omega \left(\left[\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] \cos^2 n \theta + \frac{n^2 r^{-2}}{(8 - 21)} \right) \right]$$

En séparant les termes indépendants de θ nous pouvons mettre cette équation sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_z}{\partial z} = & e^{2\alpha z} \sin 2\omega t \left[\frac{V'^2 A^2 \alpha^2 \omega}{2} + \frac{V^2 A^2 \omega}{2} \left(\alpha^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) \right] \\ & + e^{2\alpha z} \sin 2\omega t \left[\frac{V'^2 A^2 \alpha^2 \omega}{2} + \frac{V^2 A^2 \omega}{2} \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \right] \cos 2n\theta \end{aligned}$$

Après intégration des termes dépendants de θ , nous obtenons :

$$\phi = A e^{\alpha z} \cos \omega t \cos n \theta V_n(\alpha r) - \frac{A^2 \sin 2\omega t e^{2\alpha z}}{2 \omega} \left[\frac{V'^2 \alpha^2}{2} + \frac{V^2}{2} \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \right] \cos 2n\theta \quad (8 - 22)$$

d'où l'expression des vitesses radiales et circonférentielles

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \frac{\partial \phi_2}{\partial r}$$

$$V_\theta = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = \frac{\partial \phi_1}{r \partial \theta} + \frac{\partial \phi_2}{r \partial \theta}$$

avec

$$\phi_1 = A e^{\alpha z} \cos \omega t \cos n \theta V_n(\alpha r)$$

et $\phi_2 = A^2 e^{2\alpha z} \sin 2 \omega t \cos 2 n \theta \cdot F(\alpha r)$

en posant

$$F(\alpha r) = \frac{V'^2 \alpha^2}{2} + \frac{V^2}{2} \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right)$$

VIII₄ - Détermination des lignes de vibrations

Le potentiel des vitesses défini par (8 - 22) permet de déterminer la vitesse en chaque point du fluide. Cette vitesse en un point quelconque est une fonction périodique du temps ($\cos \omega t$ ou $\cos 2 \omega t$). Cette relation ne permet donc pas de déterminer les lignes de courant observées expérimentalement (chapitre D). Cependant, les lignes de vibrations obtenues et définies par le potentiel des vitesses doivent coïncider avec ce mouvement.

Dans l'exemple représenté sur le plan N° 1 nous avons considéré $n = 2$ et par raison de symétrie, un quart de la figure a été représenté. En outre, le potentiel des vitesses a été pris sous la forme

$$\phi = A \cdot e^{\alpha z} \cdot \cos n \theta J_n(\alpha r) \cos \omega t$$

Les vitesses radiales et circonférencielles ont pour expressions :

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = A \alpha \cdot e^{\alpha z} \cdot \cos n \theta J'_n(\alpha r) \cos \omega t$$

$$V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{A n \cdot e^{\alpha z}}{r} \sin n \theta J_n(\alpha r) \cos \omega t$$

et la dénivellation au-dessus du plan moyen :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = A \alpha \cdot \cos n \theta J_n(\alpha r) \cdot \cos \omega t \cdot e^{\alpha z}$$

L'examen de ces formules montre que les lignes de courants rectilignes sont fournies par

$$\sin n \theta = 0$$

les lignes de dénivellation nulle ou lignes nodales par

$$\cos n \theta = 0$$

Les lignes de courants circulaires correspondent aux zéros de la fonction J'_n .
Les lignes nodales circulaires aux zéros de la fonction J_n .

Ces différentes lignes de courants et lignes nodales sont donc déterminées en fonction du nombre n .

La construction de l'ensemble du réseau nécessite l'étude préalable du comportement de ces lignes au voisinage des intersections des différentes lignes de courants et nodales précédemment définies.

Dans ce but, considérons la fonction de BESSEL $J_n(x)$ sous la forme d'une série, nous avons :

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \left[\frac{1}{n!} + \dots + \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \right]$$

avec

$$k = 1, 2, \dots$$

Effectuons le changement de variable :

$$x = \lambda + X$$

X étant une quantité que nous ferons tendre vers 0

la fonction $J(\lambda + X)$ étant continue et ayant toutes ses dérivées pour $x = \lambda$ nous pouvons la développer sous forme d'une série de TAYLOR

$$J_n(\lambda + X) = J_n(\lambda) + \frac{X}{1!} J'_n(\lambda) + \frac{X^2}{2!} J''_n(\lambda) + \frac{X^n}{n!} J_n^{(n)}(\lambda)$$

VIII₄₋₁ - Etude de la fonction ϕ au voisinage de l'Intersection A des lignes de courants rectilignes et circulaires

Sur une ligne de courant circulaire la vitesse radiale est nulle. Si λ désigne la valeur particulière correspondant à cette ligne, nous aurons :

$$J'_n(\lambda) = 0$$

Au voisinage du point A le coefficient de X est nul, ainsi :

$$J_n(\lambda + X) = J_n(\lambda) + \frac{X^2}{2!} J''_n(\lambda)$$



X tendant vers 0 nous limitons le développement aux deux premiers termes, donc :

$$J_n(\lambda + X) = J_n(\lambda) \left[1 + X^2 \frac{J_n''(\lambda)}{2 J_n(\lambda)} \right]$$

Sur une ligne de courant rectiligne, nous avons :

$$\cos n \theta = \pm 1$$

$$n \theta = 0 + k\pi$$

pour des angles faibles :

$$\theta = \frac{\gamma}{\lambda}$$

$$\cos n \theta = \cos \frac{n\gamma}{\lambda} \quad \text{que nous pouvons développer sous la}$$

forme :

$$\cos n \theta = 1 - \frac{n^2 \gamma^2}{2 \lambda^2}$$

Au voisinage d'un point A la fonction ϕ est donc de la forme (à une constante près) :

$$\phi = \left[1 + X^2 \frac{J_n''(\lambda)}{2 J_n(\lambda)} \right] \left[1 - \frac{n^2 \gamma^2}{2 \lambda^2} \right]$$

$$\frac{J_n''(\lambda)}{J_n(\lambda)} \text{ étant négatif quel que soit } \lambda$$

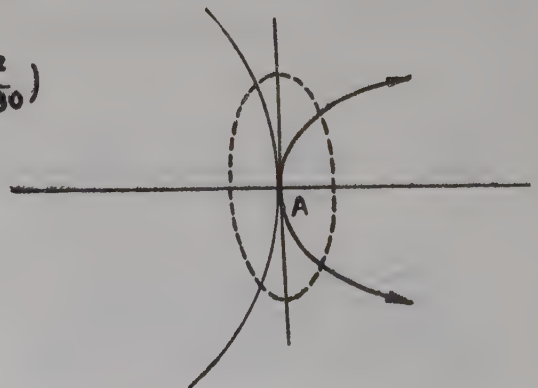
la fonction ϕ peut se mettre sous la forme :

$$\phi = 1 - \left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2} \right)$$

pour $n=1$ on trouve :

$$\phi = 1 - \left(\frac{X^2}{3,18} + \frac{\gamma^2}{6,80} \right)$$

Les lignes équipotentiellles sont des ellipses dont le grand axe est porté par l'axe des y . Les lignes de courants qui forment un réseau orthogonal au précédent sont donc tangentes en A au cercle.



VIII.2 - Etude de la fonction ϕ au voisinage de l'Intersection B des lignes nodales circulaires et rectilignes

Sur une ligne nodale circulaire $J_n(x) = 0$, si λ désigne la valeur particulière correspondant au point B nous aurons :

$$J_n(\lambda) = 0$$

d'où :

$$J_n(\lambda + X) = \frac{X}{1!} J'_n(\lambda) + \frac{X^2}{2!} J''_n(\lambda)$$

au voisinage de B, X tend vers 0 en limitant le développement aux termes du 1er ordre

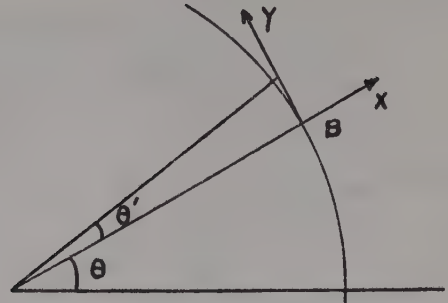
$$J_n(\lambda + X) = X J'_n(\lambda)$$

sur une ligne nodale rectiligne :

$$\cos n\theta = 0$$

effectuons le changement de variable :

$$\theta' = \frac{\pi}{2n} - \theta$$



nous aurons :

$$\sin n\theta' \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \cos n\theta \rightarrow 0$$

lorsque $y \rightarrow 0$

$$\sin n\theta' = \sin n \frac{Y}{\lambda}$$

La fonction ϕ prend la forme (à un coefficient près)

$$\phi = X \cdot J'_n(\lambda) \cdot \sin n \frac{Y}{\lambda}$$

d'où

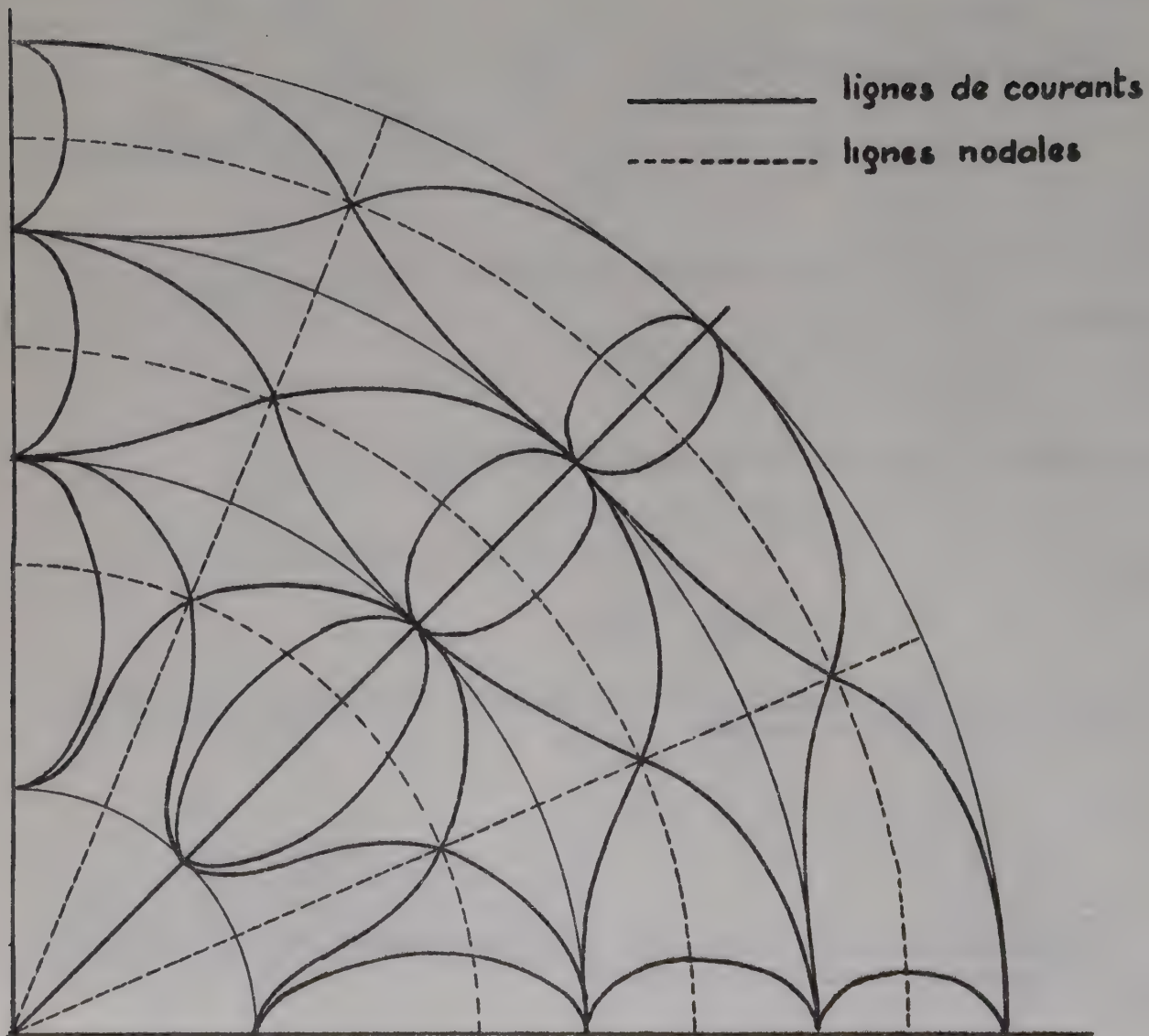
$$\phi = C \cdot X \cdot y$$

Les lignes équipotentiellles sont des hyperboles équilatères et permettent de définir les lignes de courants.

+ + +
+

Compte-tenu de ces résultats, nous donnons sur le plan N°1 la forme générale des lignes de courants, dans le cas où

$$n = 2$$

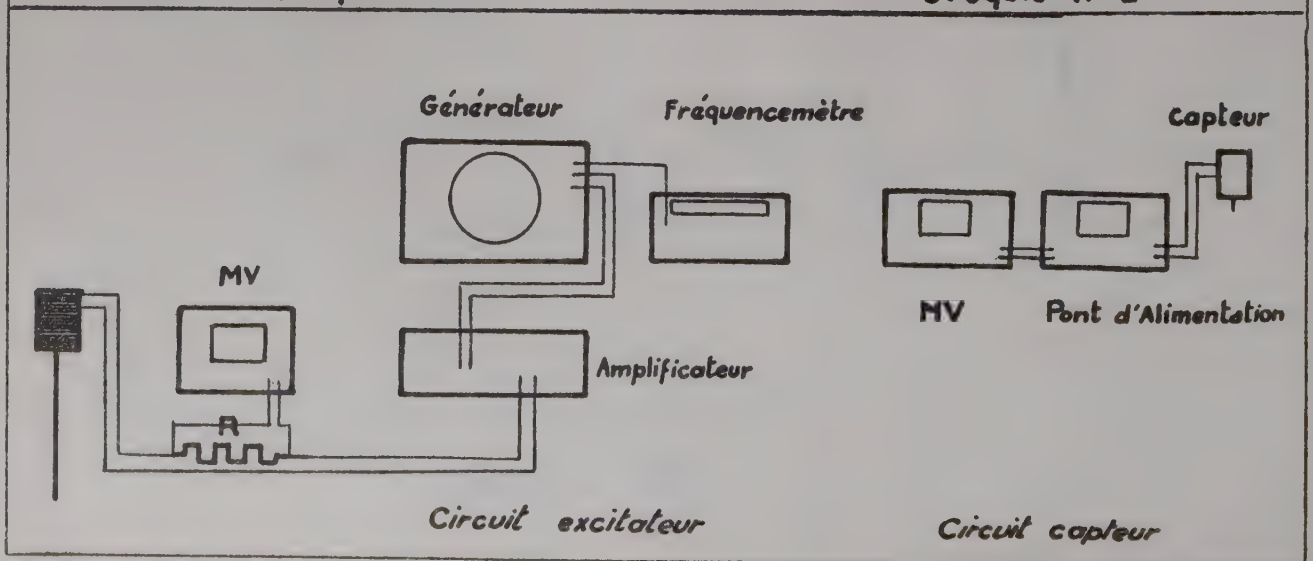
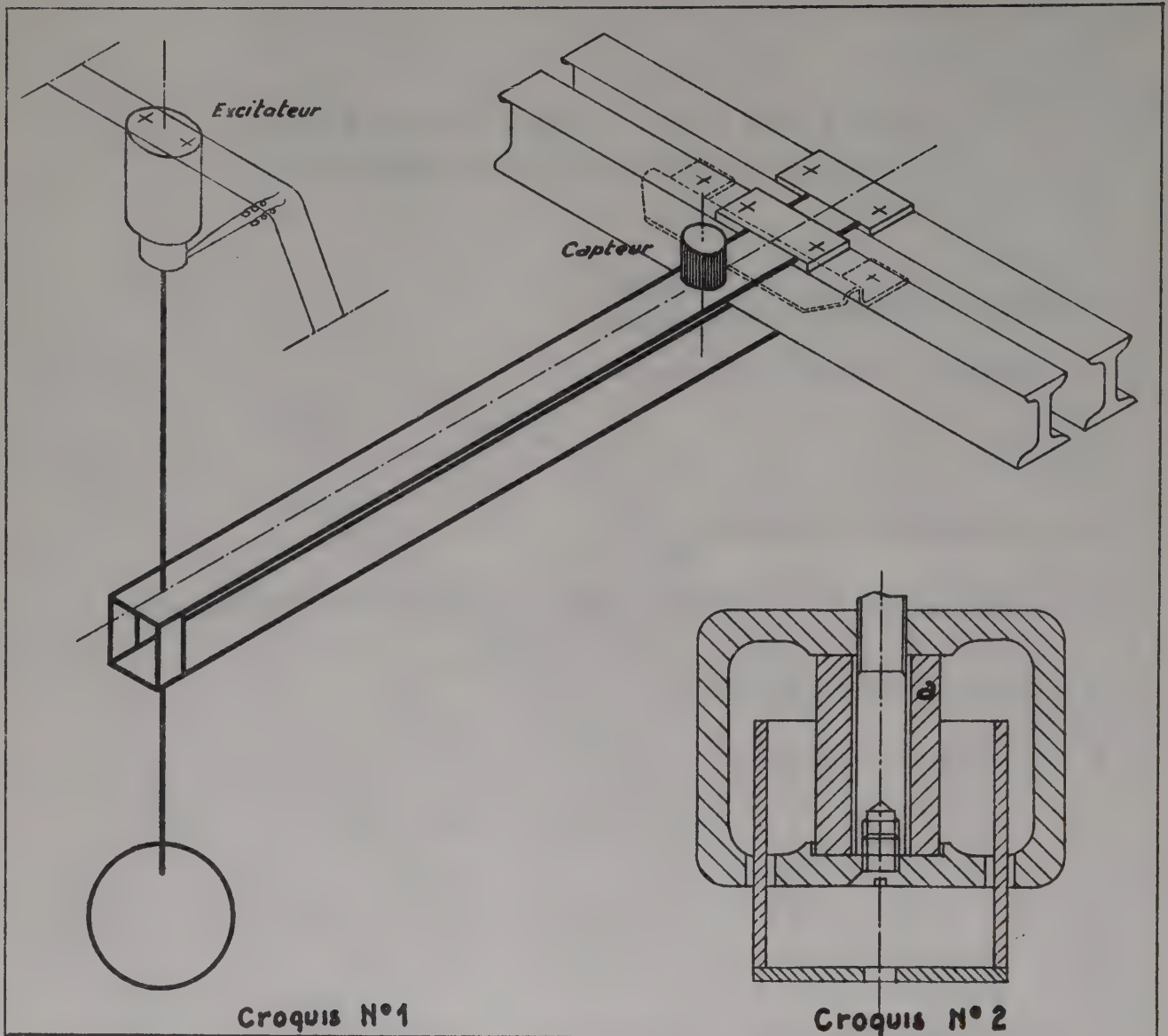


CHAPITRE B.

- DISPOSITIF EXPERIMENTAL -

SOMMAIRE

- I - But
- II - Description du dispositif
- III- Détermination de la pulsation propre de vibration des lames élastiques
- IV - Caractéristiques techniques
- V - Linéarité du système



DISPOSITIF EXPERIMENTAL

I - BUT

Le dispositif expérimental a pour but :

- 1) de communiquer au solide S, partiellement immergé dans le fluide, un mouvement sinusoïdal de pulsation σ
- 2) de faire varier la valeur de σ et de mesurer cette grandeur
- 3) de déterminer en fonction du temps la valeur des amplitudes du mouvement du solide.

II - DESCRIPTION

Deux lames identiques et parallèles sont encastrées à l'une de leurs extrémités dans une plaque fixe A. Leurs extrémités libres sont reliées entre elles par deux plaques rigides et sont solidaires de l'axe vertical sur lequel est fixé le solide S. Nous obtenons ainsi un système à double encastrement, l'un fixe, l'autre susceptible de se déplacer verticalement.

A l'extrémité opposée au solide S, l'axe supporte une bobine d'excitation b (croquis n° 1)

Un certain nombre de spires de cette bobine, sont placées dans le champ magnétique permanent créé par un aimant a . Les lignes d'induction de cet aimant sont canalisées par une armature en fer doux (croquis n° 2). La bobine est alimentée par un courant, d'intensité et de fréquence variables à l'aide d'un générateur et d'un amplificateur.

La différence de potentiel relevée aux bornes d'une résistance R connue, placée dans le circuit d'alimentation de b permet de déterminer l'intensité du courant d'excitation.

Un fréquencemètre (utilisé en périodemètre) permet de connaître avec une très grande précision la période d'excitation (période mesurée à 10^{-4} seconde près sur 10 périodes).

Un capteur de déplacement C , relève les déplacements d'un point d'une lame et, après étalonnage, les déplacements verticaux de S . Un pont de mesure assure l'alimentation de ce capteur et la démodulation du courant porteur. Un millivoltmètre mesure les amplitudes des modulations qui sont proportionnelles aux amplitudes du solide.

III - DETERMINATION DE LA PULSATION PROPRE DE VIBRATION DE LA POUTRE ENCASTREE

A SES DEUX EXTREMITES

1ère Méthode

La poutre est encastrée à ses deux extrémités.
L'encastrement B pouvant se déplacer verticalement sous l'action d'une charge concentrée P et du poids propre de la poutre

La déformée doit satisfaire aux conditions :

$$\text{pour } x = 0 \quad y = 0 \quad y' = 0$$

$$x = l \quad y = Y \quad y' = 0$$

$x = \frac{l}{2} \quad y = \frac{Y}{2}$ par raison de symétrie,
d'où l'équation :

$$y = \frac{Y}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right) \quad (3 - 1)$$

Y désignant la flèche en B (Y fonction du temps)

ρ la masse spécifique du métal constituant les lames élastiques

E leur module d'élasticité

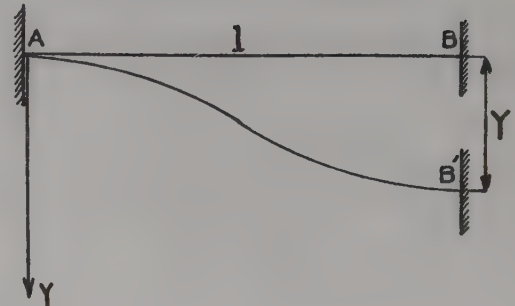
I leur moment d'inertie

L'énergie cinétique des lames en vibration est :

$$dT = \frac{1}{2} \rho \cdot dx \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \quad (3 - 2)$$

l'énergie potentielle :

$$dV = \frac{1}{2} EI \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3 - 3)$$



en reportant la valeur définie par (3 - 1) dans l'équation (3 - 2) il vient :

$$T_{\text{lame}} = \int_0^l \frac{1}{2} \rho dx \cdot \frac{Y'^2}{4} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right)^2$$

$$T_{\text{lame}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \rho l Y'^2$$

et l'énergie cinétique totale compte tenu de la masse $M = \frac{P}{g}$ est :

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \mu \cdot Y'^2 + \frac{1}{2} M Y'^2 \quad (3 - 4)$$

avec

$$\mu = \rho l$$

Un calcul analogue nous donne pour l'énergie potentielle :

$$V = \frac{1}{2} \frac{\pi^4 \cdot EI}{8 l^3} \cdot Y^2 \quad (3 - 5)$$

La pulsation propre de vibration des lames dans l'hypothèse d'une déformée sinusoïdale est :

$$\omega_0^2 = \frac{\pi^4 \frac{EI}{8 l^3}}{M + \frac{3}{8} \mu} = \frac{12,20 \frac{EI}{l^3}}{M + 0,375 \mu} \quad (3 - 6)$$

2ème Méthode

Connaissant la relation : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{-M_f}{EI}$

M_f désignant le moment fléchissant dans une section droite de la poutre, nous pouvons déterminer la déformée de la poutre.

Après intégrations, nous avons :

$$y = \frac{Y}{l^3} [2x^3 - 3lx^2]$$

x représentant l'abscisse d'une section droite par rapport à l'encastrement fixe.

Un calcul analogue au précédent, permet de déterminer la pulsation propre.

Après simplification, nous obtenons :

$$\omega_0^2 = \frac{12 \frac{EI}{l^3}}{M + 0,370 \mu} \quad (3 - 7)$$

soit pour (3 - 7) une valeur très proche de celle obtenue en (3 - 6).

IV - CARACTERISTIQUES TECHNIQUES

Les caractéristiques techniques du système sont :

diamètre de la sphère $\varnothing = 80 \text{ mm}$
volume $V = 268 \text{ cm}^3$
poids : 196 grammes
diamètre de la tige de fixation : 8 mm

caractéristiques des lames

$E = 7\,000 \text{ kg/mm}^2$ environ

densité : 2,7
largeur : 30 mm épaisseur : 3 mm
longueur variable 260 à 400 mm

Compte tenu du poids de la bobine et des différents éléments d'encastrement de la tige, pour une lame de longueur 300 mm, nous trouvons :

soit : $M + 0,37 = 420 \text{ grammes}$

$\omega = 9810$

d'où la fréquence d'excitation :

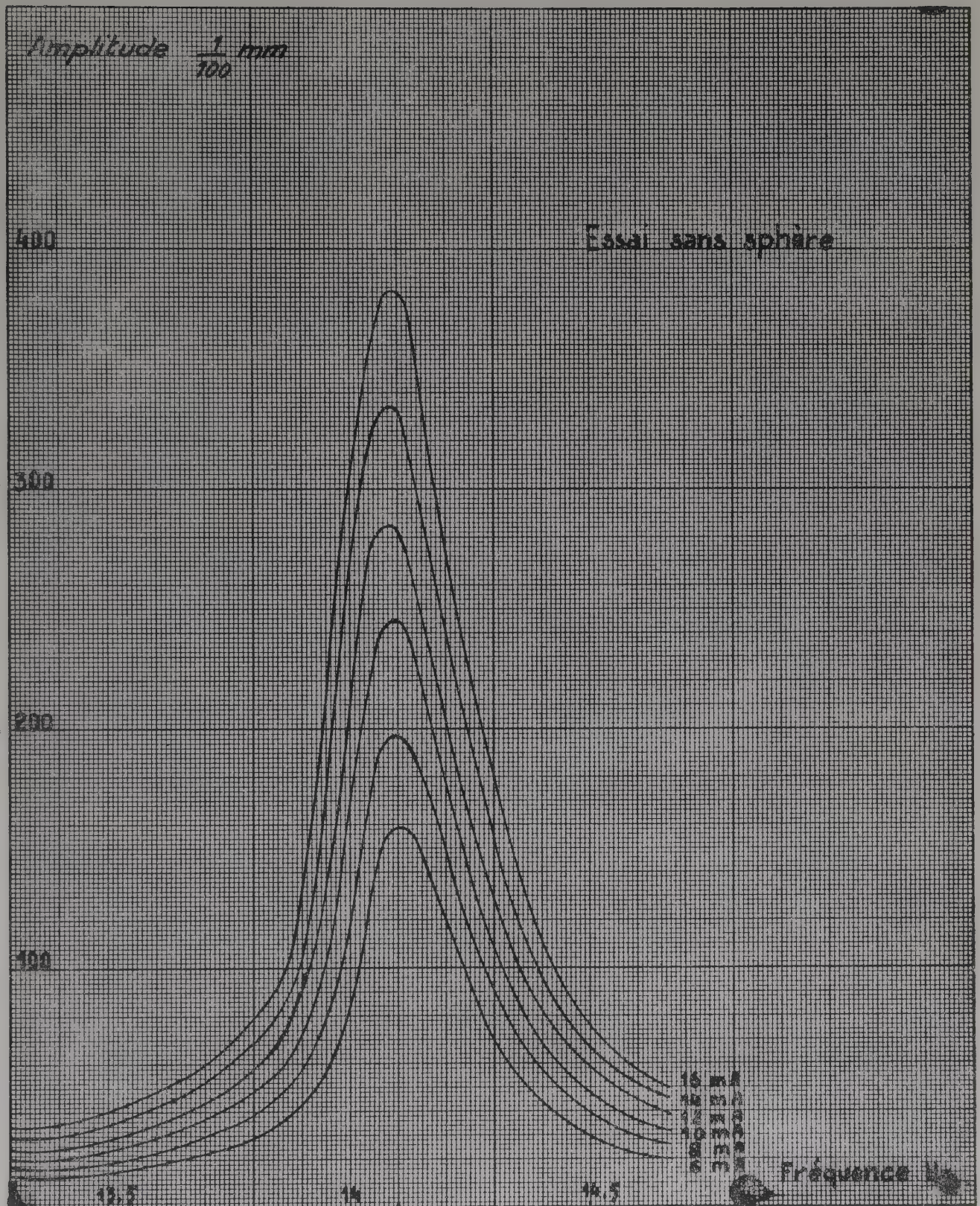
$N = 15,75 \text{ Hertz}$

Expérimentalement, pour cette longueur de lames, nous obtenons :

$N = 16,8 \text{ Hertz.}$

V - LINEARITE DU SYSTEME

Sur le plan N° 2 nous avons représenté une série de courbes de résonance du système à vide. Ces courbes nous montrent que pour une gamme d'amplitudes comprises entre 1 et 4 mm environ, le système reste parfaitement linéaire. Différents essais ont été effectués avec des longueurs de lames variables et ont donné des résultats analogues.



CHAPITRE C.

- ETUDE DE LA MASSE LIQUIDE VIRTUELLE -

- ET DE L'AMORTISSEMENT -

SOMMAIRE

A - VIBRATIONS DES SPHERES

- I - Introduction
- II - Description des expériences
- III - Détermination expérimentale de la masse du système vibrant
- IV - Détermination de la masse liquide virtuelle
- V - Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux

B - MASSE LIQUIDE VIRTUELLE RELATIVE A UN CÔNE PARTIELLEMENT IMMERGE

- I - Résultats expérimentaux
- II - Comparaison avec d'autres résultats expérimentaux

C - ETUDE DE L'AMORTISSEMENT

- I - Etude théorique
- II - Etudes expérimentales antérieures
- III - Technique expérimentale :
 - 1 - Définition
 - 2 - Précision des mesures
 - 3 - Résultats expérimentaux
 - 4 - Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux

ETUDE DE LA MASSE LIQUIDE VIRTUELLE

ET DE L'AMORTISSEMENT

A - VIBRATIONS DES SPHERES

I - Introduction et mise en équation du mouvement de la sphère

Si l'expression "masse entraînée" est valable pour certains éléments du fluide situés à la surface du corps, et qui ont à chaque instant la même vitesse que ce dernier, cette masse réellement entraînée ne constitue en fait qu'une partie souvent très faible de la masse en mouvement.

En fait, nous déterminons au cours des expériences la masse fictive, ou masse apparente, de la sphère qui tient compte de l'ensemble du mouvement perturbé et que nous désignons par masse liquide virtuelle.

Mise en équation du mouvement de la sphère :

Oz désigne l'axe vertical
m la masse de la sphère

$\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}$ l'accélération de la sphère suivant Oz

F la résultante des forces appliquées à la sphère

Cette force F est fonction :

- du déplacement z (Forces de rappel)
- de la vitesse $\frac{dz}{dt}$ (amortissement du mouvement)
- de l'accélération $\frac{d^2z}{dt^2}$
- et des termes d'ordre supérieur que nous pouvons négliger en première approximation.

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = F \left(z, \frac{dz}{dt}, \frac{d^2z}{dt^2}, \dots \right)$$

que nous pouvons mettre sous la forme :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -kz - b \frac{dz}{dt} - \mu \frac{d^2 z}{dt^2} \dots$$

soit :

$$0 = (m+\mu) \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz$$

équation qui traduit le mouvement de la sphère, avec

μ = masse liquide virtuelle entraînée.

II - Description des expériences

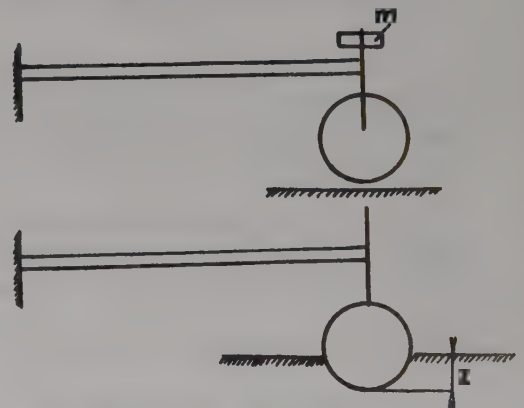
La sphère étant placée comme nous l'avons indiqué dans le chapitre précédent, nous déterminons les courbes de résonance du système correspondant aux différents cas suivants :

sphère hors d'eau avec ou sans surcharge m

sphère partiellement immergée d'une quantité z variable de 0 à 3 R . - R étant le rayon du solide.

L'expérience montre qu'au delà de cette immersion la masse liquide virtuelle reste constante.

Ces expériences sont répétées pour des lames de longueur l variant de 260 mm à 400 mm. La plage de fréquence balayée est de 10 à 20 Hertz



III - Détermination expérimentale de la masse du système vibrant

Théoriquement nous avons exprimé la masse du système vibrant en supposant par hypothèse les lames parfaitement encastrees à leurs deux extrémités. Les difficultés de réalisations pratiques de tels encastrements nous conduisent à déterminer expérimentalement cette masse.

Ki désignant la raideur du système correspondant à une longueur de lames li et Mi la masse de ce système, la pulsation propre, est donnée par la relation :

$$\omega_{oi}^2 = \frac{K_i}{M_i} \quad (3 - 1)$$

si m représente une masse connue, placée sur la tige verticale supportant la sphère, la nouvelle pulsation est :

$$\omega_{oi}^2 = \frac{K_i}{M_i + m} \quad (3 - 2)$$

La raideur K_i reste inchangée, les déplacements étant proportionnels aux charges (système linéaire)

d'où la valeur :

$$M_i = \frac{m}{\frac{T_i^2}{T_{oi}^2} - 1} \quad (3 - 3)$$

T_i et T_{oi} étant les périodes correspondantes aux pulsations ω_i et ω_{oi} .

Pour différentes longueurs de barres, nous avons obtenu :

l_i	400	390	380	360	340	320	300	280	260
$\frac{T_i^2}{T_{oi}^2}$	1,2274	1,2307	1,2330	1,2335	1,2396	1,2435	1,2371	1,2358	1,2498
M_i	439,7	433	428,5	428,3	417,4	410,7	421,8	424	400,3

l exprimée en mm.

M_i en grammes

IV - Détermination de la masse liquide virtuelle

La sphère étant partiellement immergée à une profondeur z , nous désignons par M_{iz} la masse liquide virtuelle ment entraînée par l'élément immergé.

La pulsation propre mesurée en relevant la courbe de résonance de ce système est :

$$\omega_{iz}^2 = \frac{K_i}{M_i + m_{iz}} \quad (3 - 4)$$

(3 - 1) et (3 - 4) donnent comme masse fictive :

$$M_{iz} = M_i \left[\frac{T_{iz}^2}{T_{oi}^2} - 1 \right]$$

Les courbes de la planche 3 montrent les variations de m_{iz} en fonction de z pour quatre longueurs de lames différentes

A chaque immersion correspond une valeur moyenne de m_{iz} et un volume immergé V_z , qui permet de définir un coefficient $\frac{m_{iz}}{V_z}$ dont nous donnons les variations planche n° 4

Le tableau ci-dessous indique les valeurs de m_{iz} obtenues expérimentalement pour une immersion de la sphère correspondant à trois fois son rayon

$$z = 3 R = 120 \text{ mm.}$$

li	400	390	380	360	340	320	300	280	260
mi	138,6	139,48	139,01	138,11	137,27	135,72	142,93	145,23	139,07
F ^F Hertz	9,0	9,5	10	11	12,2	13,4	14,6	16,2	18

F indique la fréquence à laquelle m_i a été calculée

Les variations de m_i en fonction de la fréquence sont trop faibles pour pouvoir être décelées expérimentalement.

La valeur moyenne de m_i nous donne :

$$m_i = 139,50 \text{ grammes} + 2,5 \text{ grammes}$$

sachant que le volume de la sphère est de 268 cm^3 , le coefficient k défini par :

$$m_i = k \cdot V \cdot \rho$$

est :

$$k = 0,521 \pm 0,009$$

V - Conclusion - Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux

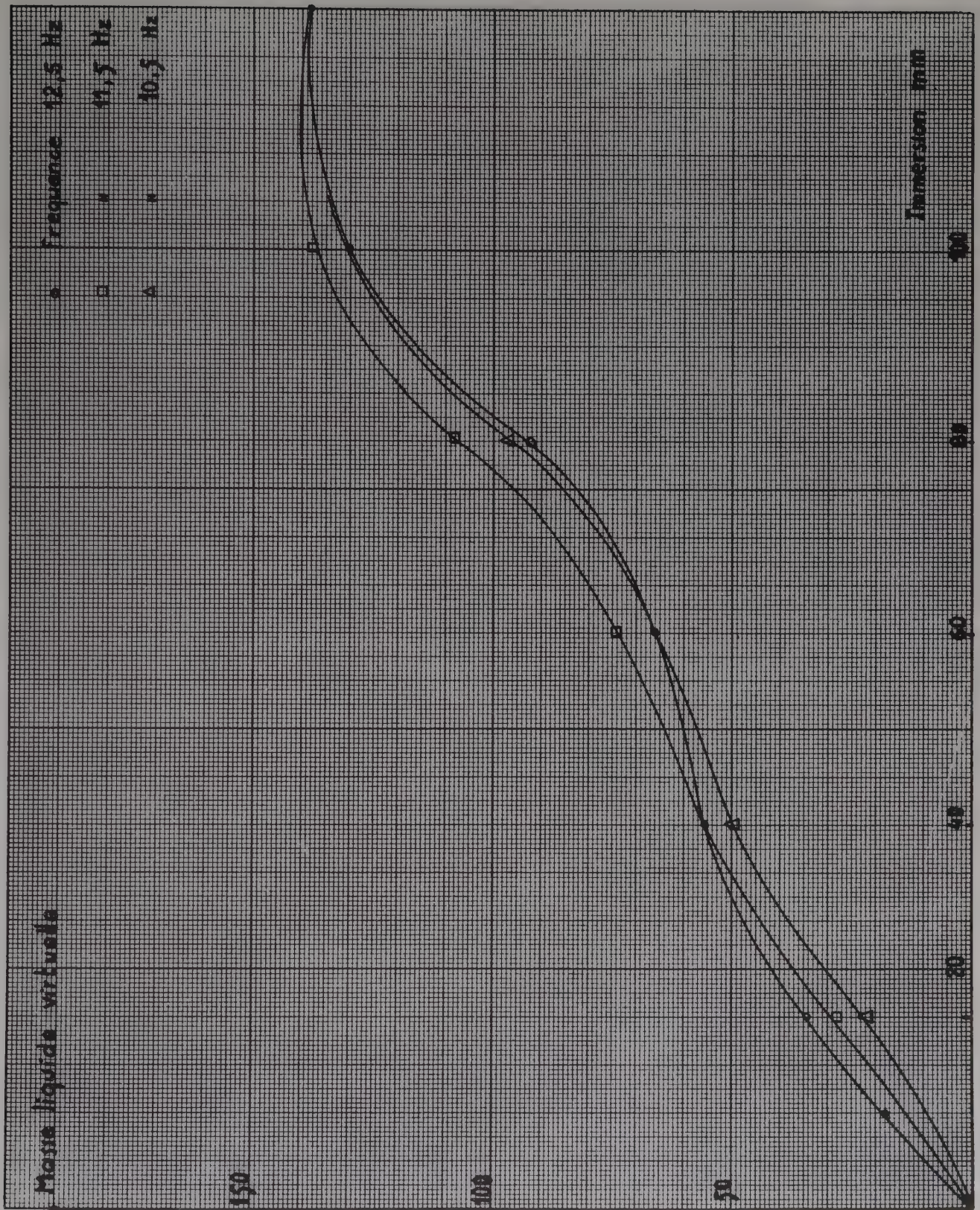
Lorsque la sphère est immergée, une partie de la tige de fixation se trouve placée dans le fluide. Or, pour un cylindre, le coefficient k théorique est égal à 1, ce qui nous conduit à apporter une correction correspondant à une masse m_c avec :

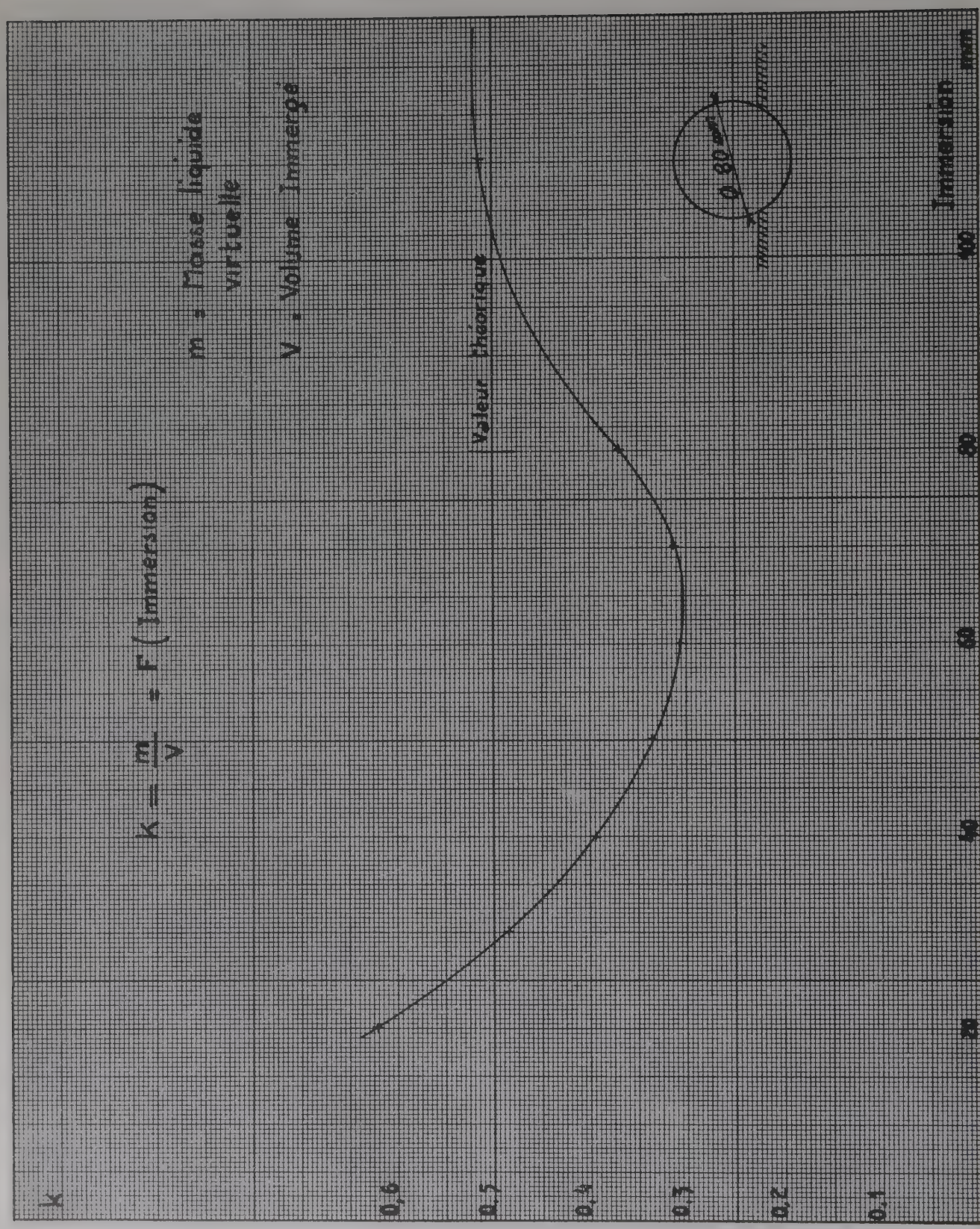
$$m_c = 2,01 \text{ grammes}$$

$$\text{ainsi : } m_i = 137,49 \text{ grammes}$$

$$\text{et : } k = 0,513 \pm 0,009$$

Dans ces travaux relatifs aux oscillations d'une sphère dans l'eau, M. MARTY





PLAN N°4

qui s'intéressa aux fréquences inférieures à 1 Hertz a trouvé expérimentalement pour une sphère de 4 cm de rayon, la relation :

$$k = 0,5 + 0,037 \sqrt{T}$$

T étant la période d'oscillation, ce qui donne pour une fréquence de 10 hertz :

$$\underline{k = 0,5117}$$

Valeurs théoriques

STOKES, dans son mémoire de 1850, a calculé théoriquement la valeur de k ; pour une sphère, ce coefficient est donné par la relation :

$$k = 0,5 + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\eta T}{\pi \rho}}$$

avec :

η viscosité du fluide
 ρ densité du fluide
T période d'oscillation
R rayon de la sphère

dans le système CGS et pour une température de 20° correspondant à celle des essais, nous avons :

$$\frac{\eta}{\rho} = 0,01$$

ainsi :

$$k = 0,5 + 1,269 \cdot \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\eta}{\rho} T}$$

pour R = 4 cm
et T = 0,1

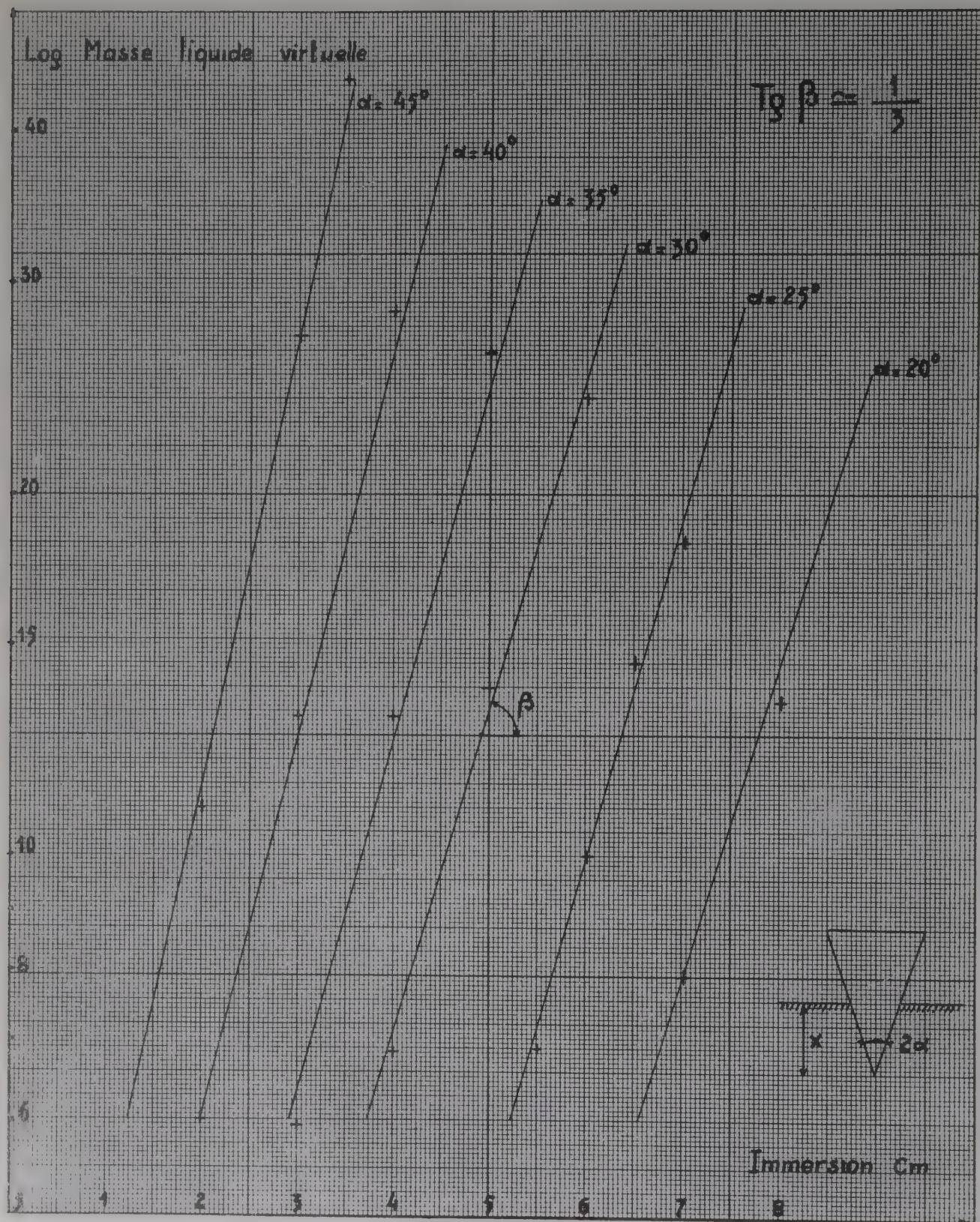
nous obtenons :

$$\underline{k = 0,510}$$

La formule de STOKES semble donc se vérifier pour des fréquences élevées et des amplitudes d'oscillations faibles ≤ 3 mm, alors que l'on observe un désaccord notable entre les résultats théoriques et ceux de l'expérience (M. MARTY) pour des fréquences inférieures à 1 Hertz et des grandes amplitudes (mouvement pendulaire).

B - MASSE LIQUIDE VIRTUELLE RELATIVE A UN CÔNE PARTIELLEMENT IMMERGE

I - Résultats expérimentaux

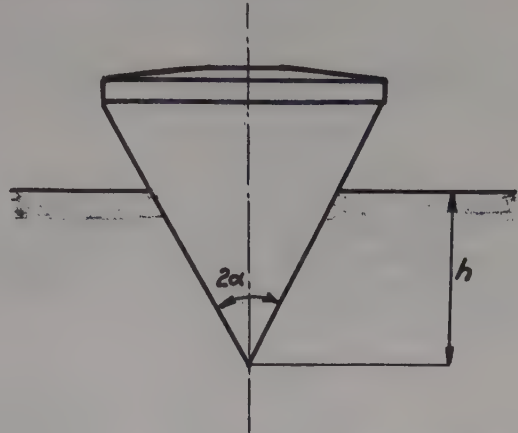


Les résultats du paragraphe précédent montrent que pour une sphère, le coefficient k , définissant la masse liquide virtuelle en fonction du volume immergé dépend de l'immersion de la sphère, donc de la forme du solide immergé.

Afin d'étudier cette influence, nous avons expérimenté une série de 8 cônes dont les caractéristiques géométriques sont données au chapitre

Expérimentalement, nous avons obtenu les résultats suivants (plan n° 5) qui montrent que, pour un angle au sommet du cône déterminé 2α , la masse liquide virtuelle est proportionnelle au cube de la hauteur immergée.

En première approximation, l'influence de la surface libre semble donc négligeable (sauf pour α grand, car dans ce cas, le cône reste constamment au voisinage de cette surface).



Désignons par m cette masse liquide et par h la hauteur immergée (figure ci-dessus), on obtient :

$$m = k h^3$$

le volume immergé a pour valeur :

$$V = \frac{\pi}{3} h^3 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

Pour une valeur de α déterminée, la masse liquide virtuelle est donc proportionnelle au volume immergé. Résultat analogue à celui obtenu avec les solides totalement immergés.

posons : $m = k_1 V$

il vient :

$$k_1 = k \cdot \frac{3}{\pi \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Pour les différents cônes, nous avons obtenu les résultats suivants :

degré	20	25	30	35	40	45	50
k_1	0,187	0,210	0,374	0,497	0,650	1,023	1,40

Rappelons que pour une sphère totalement immergée $k = 0,5$

et pour un cylindre $k = 1$

II - Comparaison des valeurs de k_1 avec d'autres résultats expérimentaux

Un certain nombre d'expériences tendant à déterminer la valeur expérimentale de k_1 ont été effectuées par BESSEL et BAILY en utilisant des doubles cônes (figure ci-contre)

$$\text{Section } S = 41,2 \text{ cm}^2$$

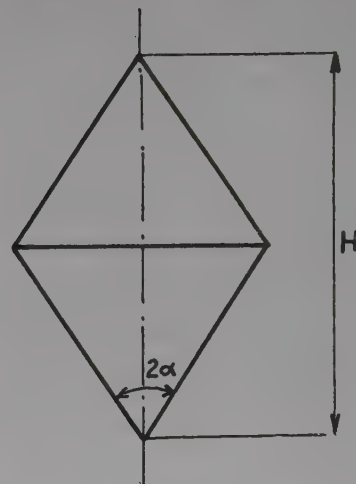
$$\text{hauteur } H = 81 \text{ et } 146 \text{ mm.}$$

$$\alpha = 41^\circ \text{ et } 27^\circ$$

Les masses liquides virtuelles obtenues, par les auteurs, en faisant osciller ces doubles cônes à des fréquences inférieures à 1 Hertz, sont :

$$95 \text{ g. pour } H = 81 \text{ mm.}$$

$$68 \text{ g. pour } H = 145 \text{ mm.}$$



partant de ces valeurs déterminons le coefficient k , et comparons à celui obtenu avec des fréquences de 10 Hertz environ. (Interpolation des résultats désignés dans le tableau ci-dessus).

$$\alpha = 41^\circ$$

$$k_1 = 0,822 \text{ à } 1 \text{ Hertz}$$

$$k_1 = 0,724 \text{ à } 10 \text{ Hertz}$$

$$\alpha = 27^\circ$$

$$k_1 = 0,340 \text{ à } 1 \text{ Hertz}$$

$$k_1 = 0,292 \text{ à } 10 \text{ Hertz}$$

Conclusion :

Aux erreurs expérimentales près, les résultats semblent coïncider. L'influence de la surface libre est donc négligeable dans la détermination de la masse liquide virtuelle.

Une série d'expériences a été effectuée en modifiant la tension superficielle du liquide. Nous avons noté :

- que les fréquences d'excitation correspondant aux maxima des courbes de résonance (et qui permettent de déterminer la masse liquide virtuelle) restent inchangées.

- que les amplitudes du mouvement sont très légèrement modifiées, cependant au voisinage de la fréquence de résonance il est impossible de déterminer ces variations car l'amplitude atteinte (théoriquement infinie) varie en fonction du temps du fait des turbulences existant au voisinage du solide immergé. En outre, ces variations d'amplitudes n'entraînent aucune modification dans le calcul de la masse liquide virtuelle.

C - ETUDE DE L'AMORTISSEMENT

I - Etude théorique

L'étude théorique a été effectuée par STOKES en 1850 . Dans son mémoire l'auteur étudie l'amortissement des solides (sphères en particulier) totalement immergée dans un fluide.

La valeur trouvée pour le décrément logarithmique a pour expression :

$$\lambda = \log \frac{A_n}{A_{n+1}} = \eta \frac{k' M'}{M + k M} \quad (1-1)$$

dans laquelle :

M est la masse de la sphère
M' la masse du fluide déplacé
kM' la masse liquide virtuelle

Les coefficients de k et k' sont donnés par :

$$k = 0,5 + \frac{9}{4} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\eta T}{\rho \eta}} \quad (1-2)$$

$$k' = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\eta T}{\rho \eta}} \left(1 + \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\eta T}{\rho \eta}} \right) \quad (1-3)$$

soit :

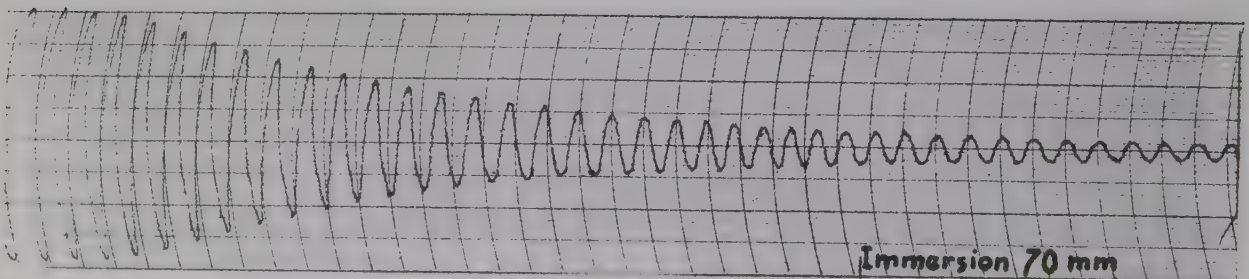
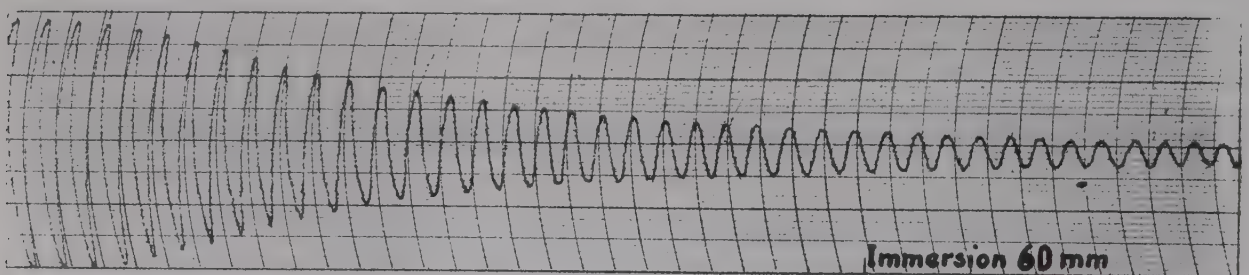
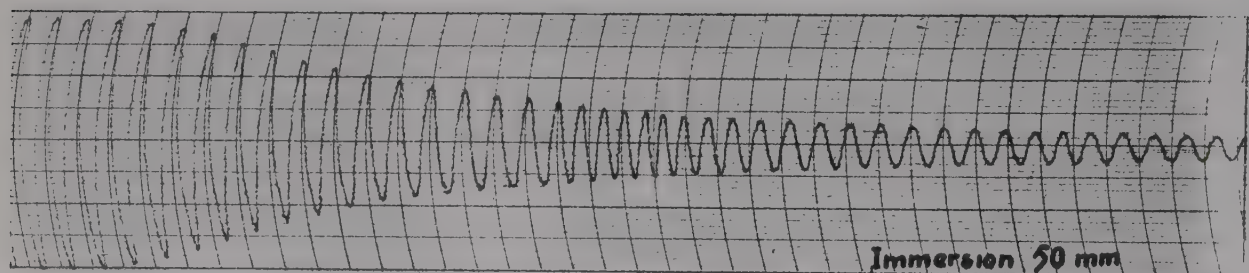
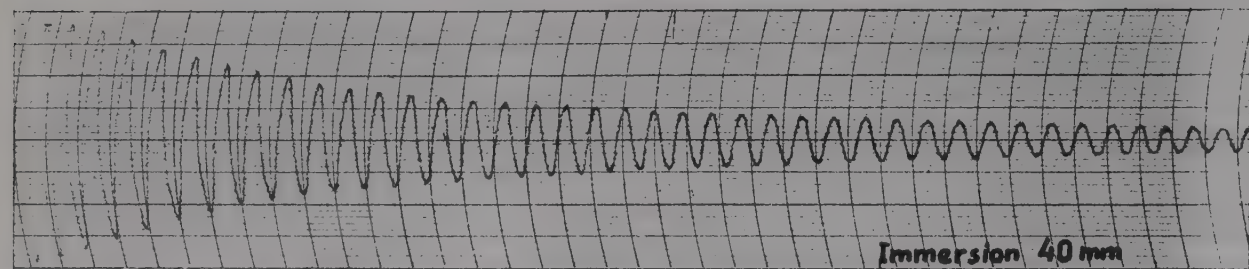
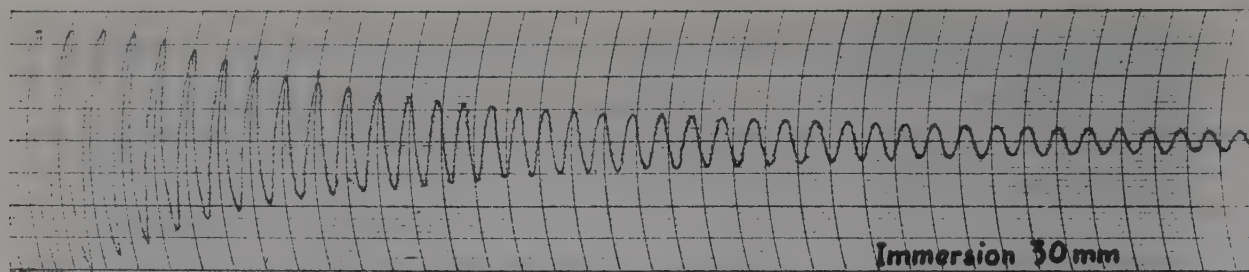
$$k' = \left(k - \frac{1}{2} \right) + \frac{4}{9} \left(k - \frac{1}{2} \right)^2 \quad (1-4)$$

Les symboles R, , T , et ρ ont été définis dans la paragraphe précédent.

II - Etudes expérimentales antérieures

Poursuivant son étude sur les oscillations de translation d'une sphère dans l'eau, M. MARTY a déterminé expérimentalement la valeur du décrément logarithmique dans le cas où la sphère est immergée dans le fluide, à une profondeur telle que l'influence de la surface libre soit négligeable (10 fois son rayon).

L'auteur constate que pour des fréquences inférieures à 2 Hertz, ses résultats expérimentaux présentent par rapport aux résultats théoriques de STOKES des différences notables. En effet, dans la formule (1-3) le coefficient numérique est $\frac{9}{4}$, or les expériences donnent pour résultats, en fonction du rayon de la sphère⁴:



R =	1	1,7	2,4	4 cm
k =	3,10	2,97	3	2,85

valeur théorique 2,25

A notre connaissance aucune détermination du coefficient d'amortissement n'a été effectuée en ce qui concerne les solides partiellement immergés et animés d'un mouvement de vibration dont la fréquence varie de 10 à 20 Hertz.

Nos expériences portent sur la détermination de ce coefficient pour une sphère de 4 cm de rayon.

III - Technique expérimentale

III₁ - Définition

Pour chaque immersion z , de la sphère, la surface libre du fluide présente deux modes de vibrations très distincts dont l'étude fait l'objet du chapitre



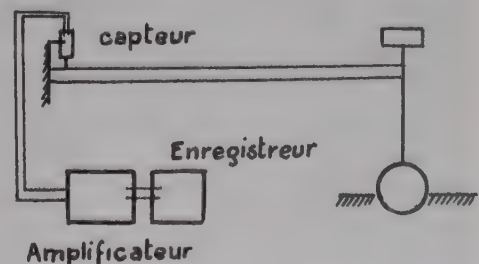
1) Vibrations donnant lieu à des ondes circulaires (1° régime)

2) Vibrations donnant lieu à des ondes périodiquement symétriques présentant sur la sphère un nombre n entier de maxima et de minima (2° régime)

La technique utilisée consiste à animer le solide d'un mouvement sinusoïdal avec une amplitude telle que le second régime soit établi.

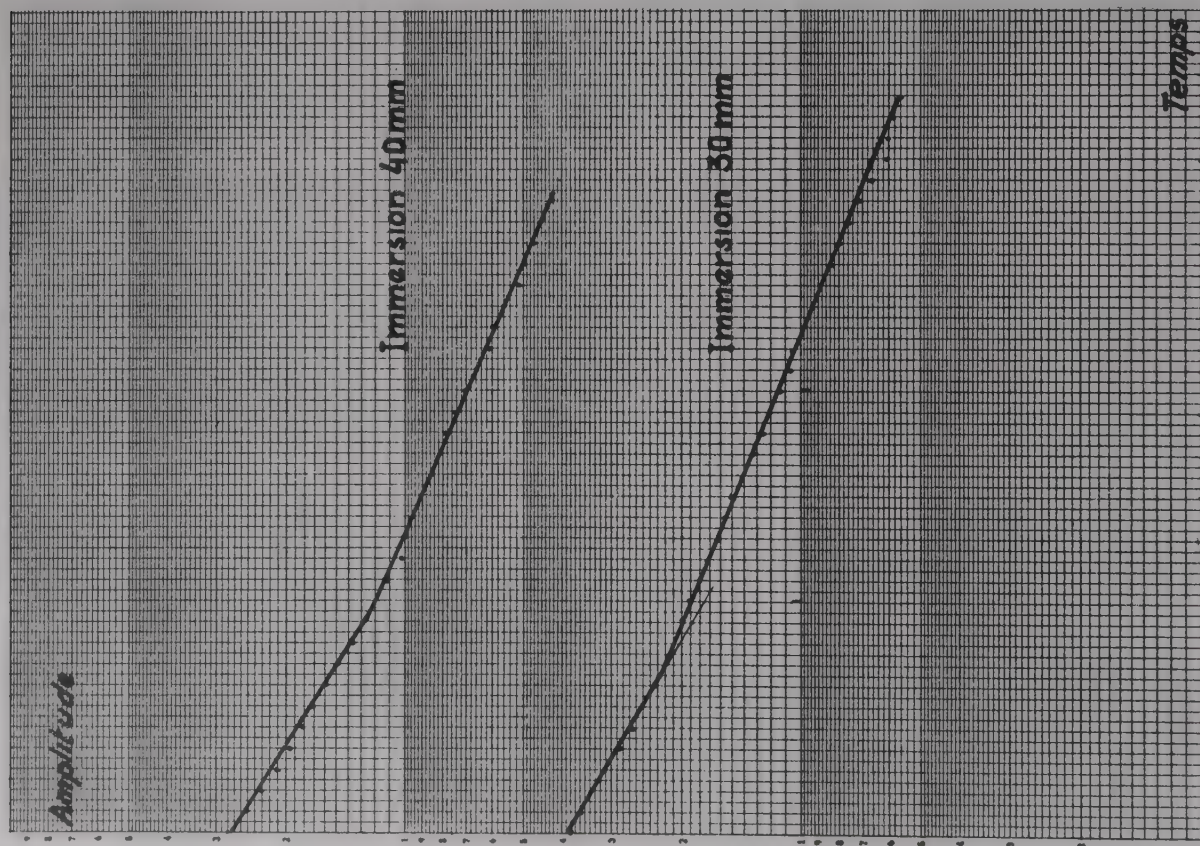
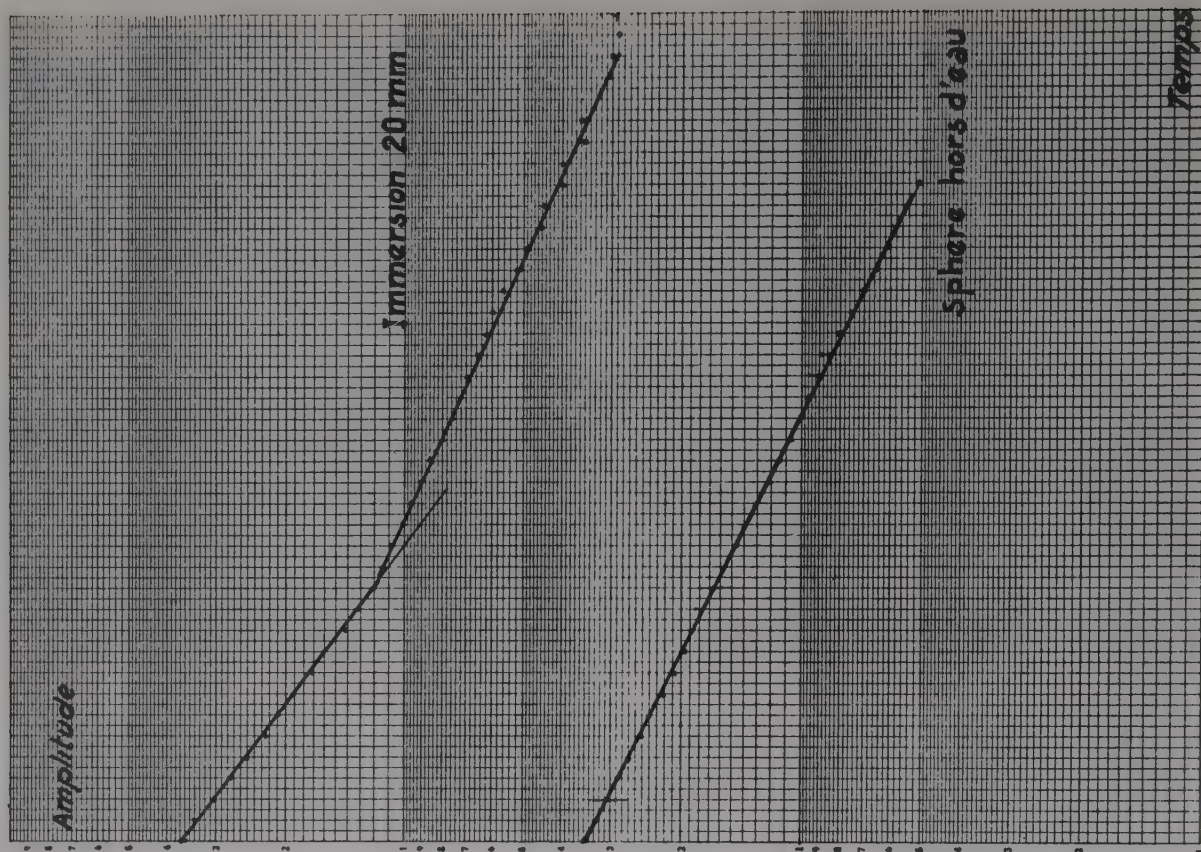
Lorsque ce second régime est établi de façon stable, l'excitation du système est coupée et un capteur de déplacement fournit un signal proportionnel aux amplitudes du mouvement.

Ce signal est amplifié et transmis à une enregistreuse graphique



Le courant d'excitation étant coupé, le mouvement de la sphère est un mouvement amorti. Le second régime persiste pendant un certain temps, puis pour une amplitude donnée, passe instantanément au premier régime (ce dernier étant plus stable aux faibles amplitudes).

Les courbes obtenues et reproduites planche n° 6 permettent de déterminer la valeur du coefficient d'amortissement dans les deux cas de vibrations.



Lorsque la sphère est totalement immergée, la surface libre du fluide reste au repos et nous retrouvons dès lors, les expériences déjà effectuées (paragraphe II) mais à des fréquences plus élevées.

En reportant sur un graphique le logarithme des amplitudes en fonction du temps, on obtient des droites dont la pente représente le décrement logarithmique (planche n° 7).

III₂ - Précision des mesures

Le décrement logarithmique est donné par la formule :

$$\lambda = \frac{\log A_n - \log A_{n+p}}{p}$$

un étalonnage initial ayant montré que l'amplification du signal était linéaire, l'erreur sur λ provient essentiellement des erreurs de lecture des amplitudes A_n et A_{n+p} .

Les enregistrements de ces derniers sont compris entre 30 mm et 8 mm et l'erreur commise sur la lecture de ces longueurs est de l'ordre de 2/10 mm.

nous avons ainsi :

$$p \Delta \lambda = \Delta \log A_n + \Delta \log A_{n+p}$$

$$p \Delta \lambda = \frac{\Delta A_n}{A_n} + \frac{\Delta A_{n+p}}{A_{n+p}}$$

ΔA_n et ΔA_{n+p} étant constants quelle que soit l'amplitude.

$\Delta \lambda$ sera maximum pour les faibles valeurs de A_n . ainsi pour :

$$A_n = 15$$

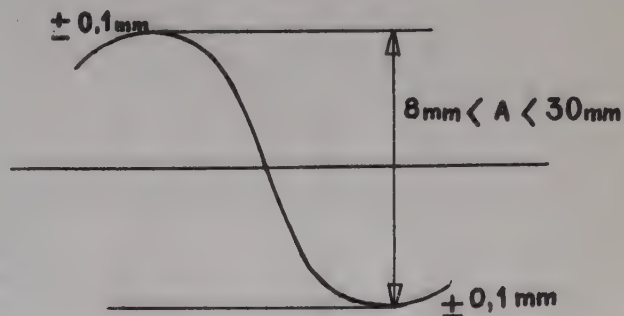
$$A_{n+p} = 12,5 \quad \text{avec} \quad p = 10$$

il vient :

$$10 \Delta \lambda = \frac{0,2}{15} - \frac{0,2}{12,5} = \frac{0,29}{10}$$

et pour :

$$A_n = 30$$



$$An + p = 18$$

et

$$10 \Delta \lambda = \frac{0,2}{30} + \frac{0,2}{18} - \frac{0,176}{10}$$

En moyenne les résultats donnés dans le tableau ci-dessous sont donc entachés d'une erreur de :

$$\Delta \lambda = \pm 0,0023$$

III₃ - Résultats expérimentaux

Immersion cm	1° Régime	2° Régime
1	0,0506	
2	0,0527	0,0910
3	0,0496	0,0709
4	0,0417	0,0749
5	0,0397	0,0690
6	0,0470	
7	0,0525	
8	0,0586	
9	0,0525	
10	0,0542	
11	0,0568	1° Régime
12	0,0557	
13	0,0564	seulement
14	0,0553	
15	0,0563	
Système à vide		
Sphère hors d'eau	0,0250	

III₄ - Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux

Pour la sphère totalement immergée, nous avons :

$$k = 0,513$$

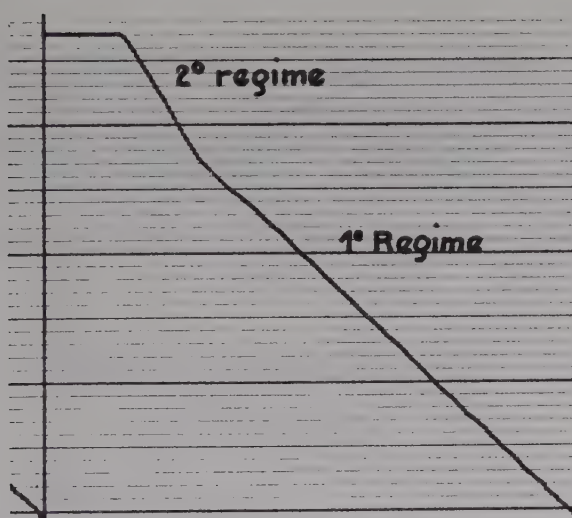
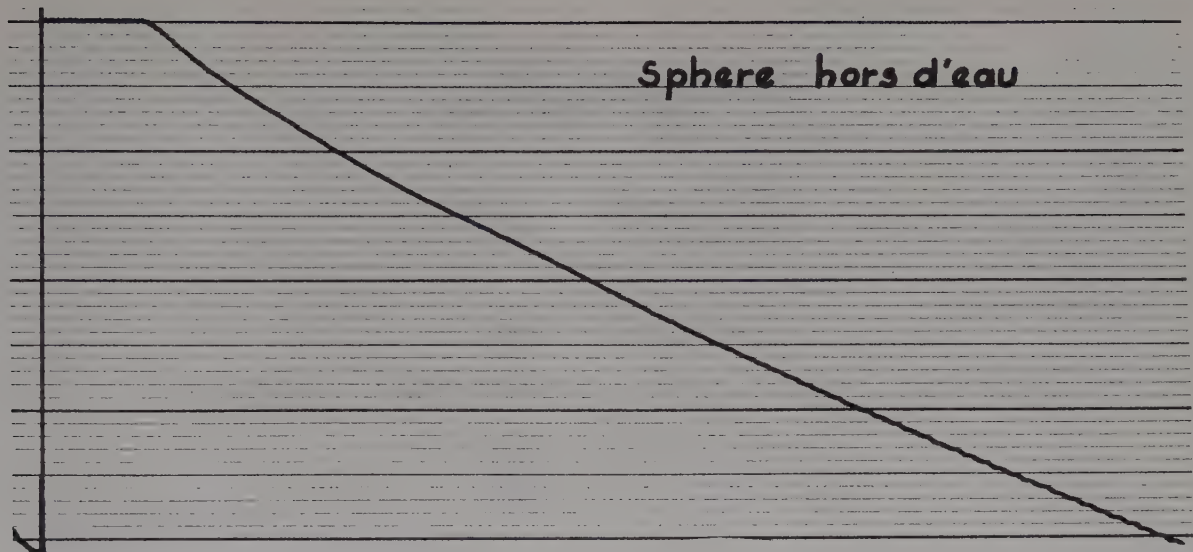
M masse de la sphère 196 g.

M' masse du fluide déplacé 268 g.

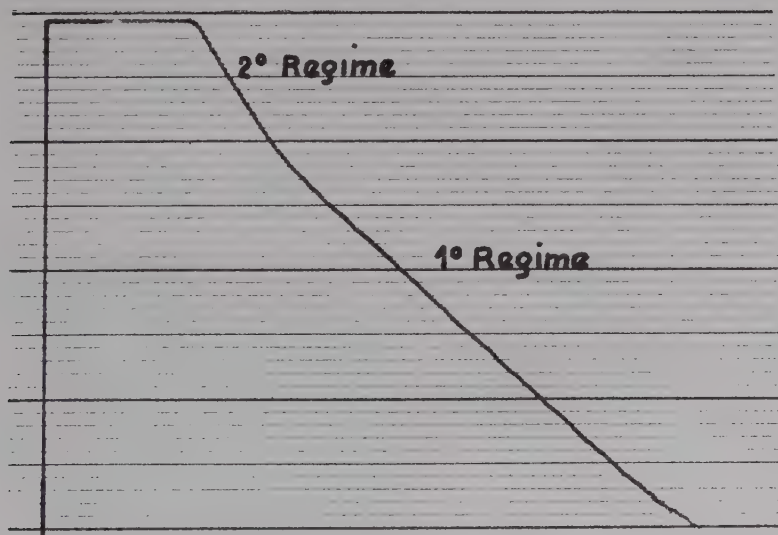
ainsi :

$$k' = (0,513 - 0,5) + \frac{4}{9} (0,513 - 0,5)^2$$

$$k' = 0,013$$



Immersion 20 mm



Immersion 30 mm

d'où la valeur théorique de

$$\lambda = \frac{\eta \cdot 0,013 \cdot 268}{196 + 0,510 \cdot 268}$$

soit :

$$\lambda = 0,0261$$

expérimentalement :

$$\lambda = 0,0563 - 0,0250$$

0,025 correspondant au système à vide, la sphère étant dans l'air

$$\lambda = 0,0313 \pm 0,0046$$

Conclusion :

Les résultats expérimentaux du paragraphe III₃ montrent que l'amortissement est plus élevé dans le second régime que dans le premier. Une étude qualitative de ce phénomène a été effectuée, à l'aide d'un enregistreur logarithmique donnant directement le tracé des droites définissant le décrétement. Le changement brusque de pente apparaît lorsque l'on passe d'un régime à l'autre (planche N° 8).

CHAPITRE D.

- VIBRATIONS DE LA SURFACE DU LIQUIDE -

SOMMAIRE

I - INTRODUCTION

II - ETUDE QUALITATIVE DU PHENOMENE

- II₁ - Mise en évidence de la variation d'amplitude
- II₂ - Nombre de crêtes et de creux

III - CONCLUSION SUR LES RESULTATS QUALITATIFS

IV - INTERPRETATION DES RESULTATS

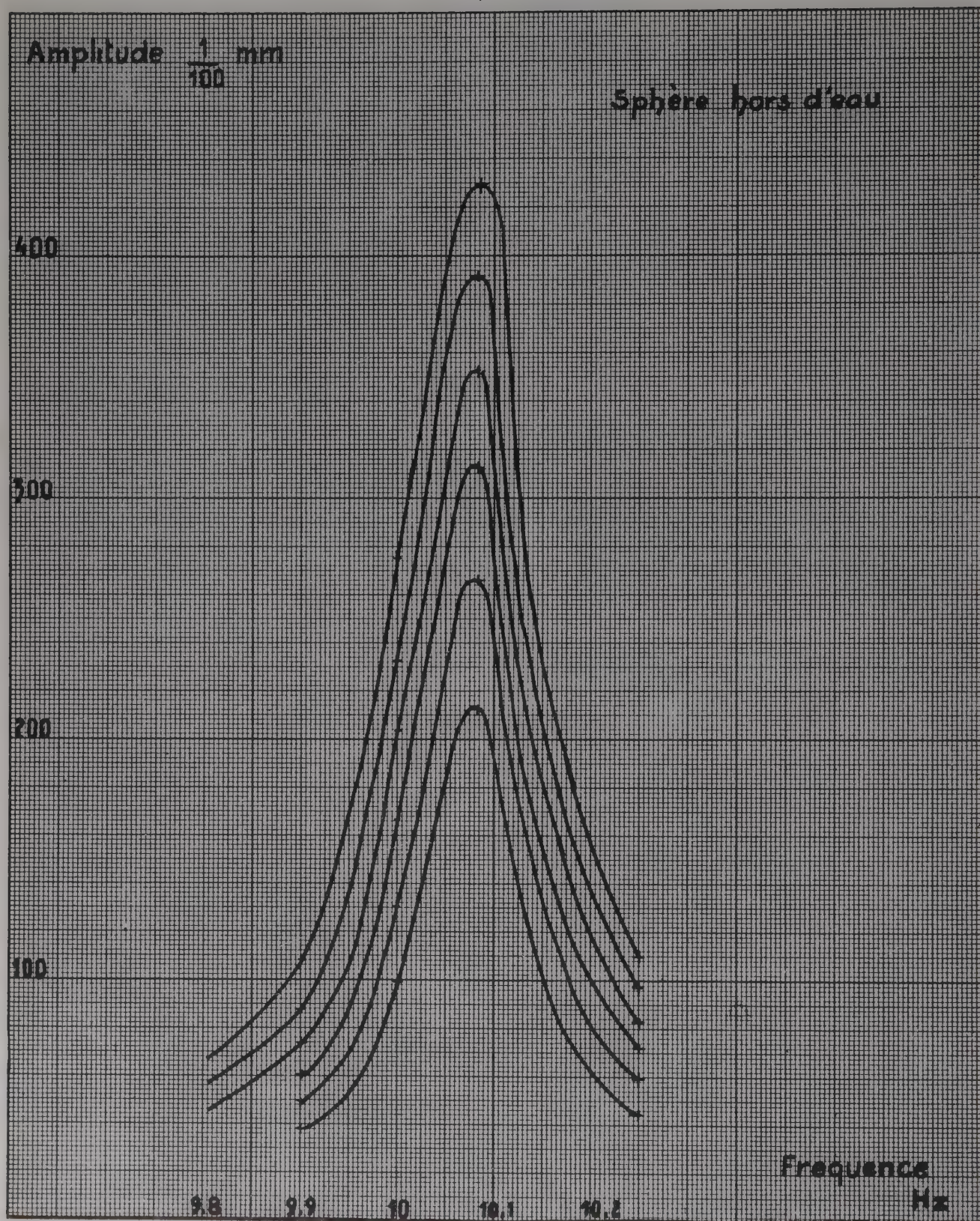
- IV₁ - Hypothèse
- IV₂ - Mouvement des points situés sur la surface libre

V - RESULTATS EXPERIMENTAUX

- V₁ - Courbes de changement de régime
- V₂ - Points doubles
 - a) zone d'instabilité
 - b) fréquences et amplitudes des points doubles
- V₃ - Influence du diamètre d'immersion des solides

VI - DETERMINATION DES MODES DE VIBRATIONS

- VI₁ - Condition limite sur le contour immergé
- VI₂ - Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux
 - VI₂₋₁ - calcul de n
 - VI₂₋₂ - influence de la forme géométrique du solide immergé



- VIBRATIONS DE LA SURFACE LIBRE -

- DU LIQUIDE -

I - INTRODUCTION

Nous avons déterminé pour des fréquences variables, la masse liquide virtuelle en fonction de l'immersion de la sphère, ou du cône, dans le fluide. A cet effet, nous avons tracé les courbes de résonance correspondant à chaque immersion en faisant varier, d'une part, la fréquence d'excitation par le réglage de la longueur des lames, d'autre part, l'intensité du courant d'alimentation de la bobine.

La sphère étant placée à l'extérieur du fluide, lorsque l'intensité du courant augmente, nous obtenons une série de courbes de résonance qui se déduisent les unes des autres par homothétie (plan N° 9)

Pour une immersion donnée de la sphère, et pour une intensité faible, nous pouvons déterminer une courbe identique aux précédentes, décalée en fréquence d'une quantité correspondant à la variation de masse du système, ce qui permet de calculer les masses fictives définies dans le chapitre précédent.

Pour une intensité plus élevée, lorsque la fréquence d'excitation tend vers la fréquence de résonance du système, les amplitudes du solide partiellement immergé augmentent, mais au delà d'un certain palier d'amplitude, (l'intensité et la fréquence d'excitation étant maintenues constantes) on observe au bout d'un temps t , (variable de quelques dixièmes de seconde, à plusieurs secondes) que l'amplitude diminue très rapidement pour se fixer à une valeur supérieure à celle du palier pré-cité (plan N° 10).

La forme des courbes de résonance est très nettement modifiée.

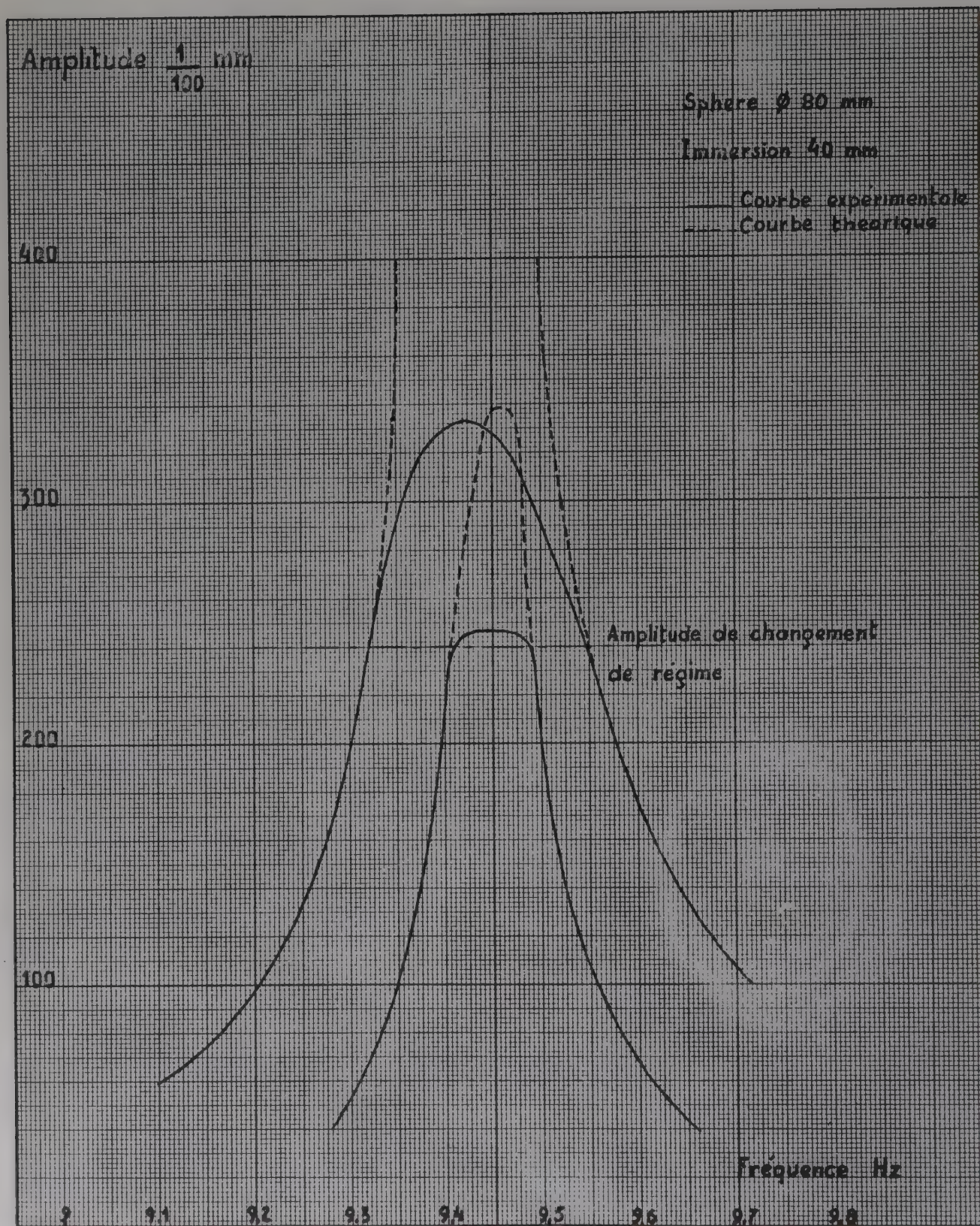
En outre, le système de vagues initialement circulaire et parfaitement symétrique par rapport à l'axe de vibration, se transforme en un système présentant sur la sphère, ou sur une circonférence concentrique, une série de crêtes et de creux.

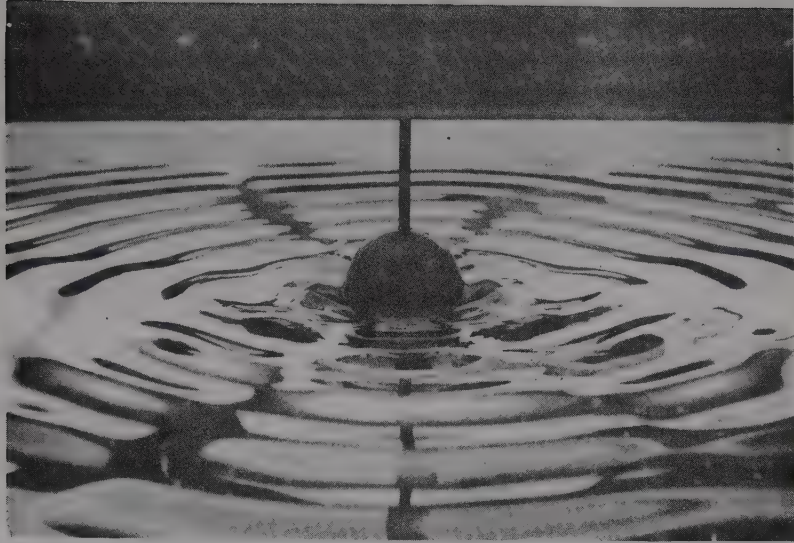
Nous donnons dans les paragraphes suivants les caractéristiques que nous avons relevées et relatives à ce phénomène.

Ces deux modes de vibrations correspondent respectivement au cas :

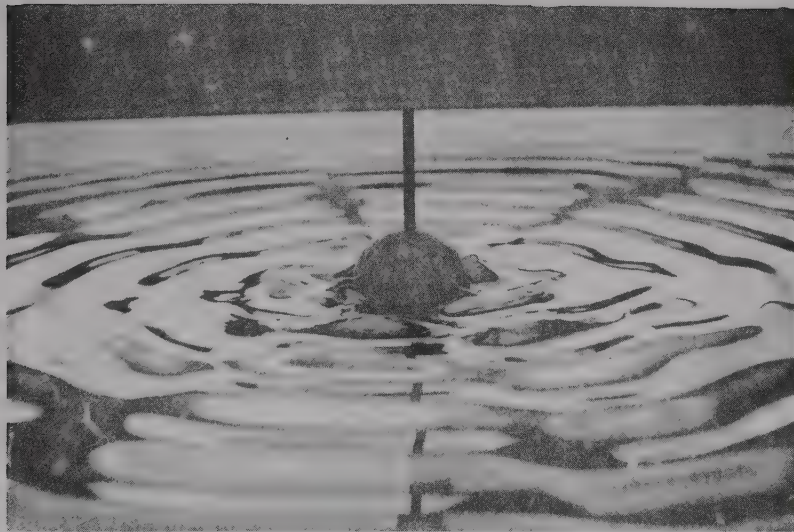
$n = 0$ (ondes circulaires)

et $n \neq 0$ (ondes périodiquement symétriques)

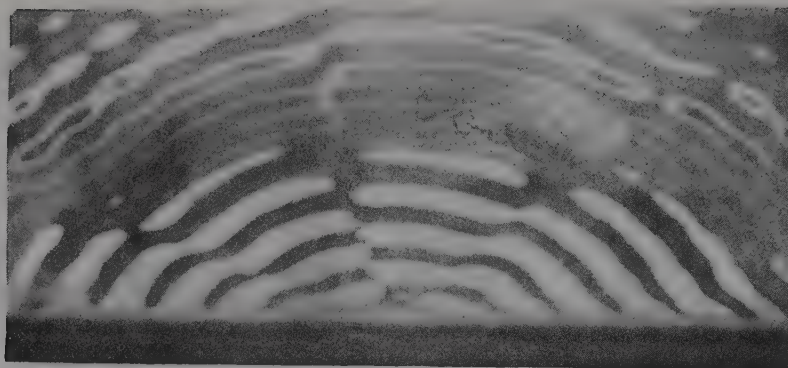




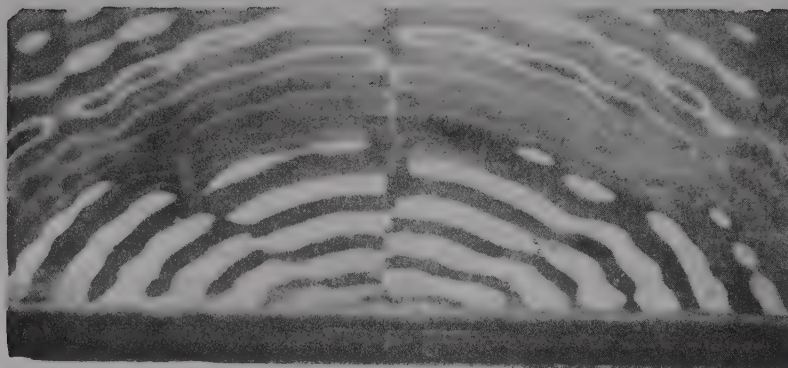
N° 1



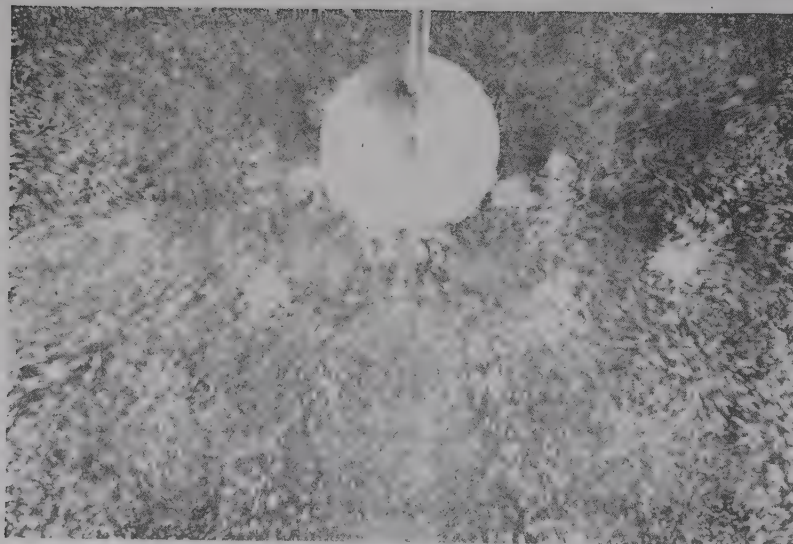
N° 2



N° 3



N° 4



N° 5

de l'étude théorique (chapitre A.).

II - ETUDE QUALITATIVE DU PHENOMENE

II₁ - Mise en évidence de la variation d'amplitude

Nous sommes en présence d'un phénomène d'instabilité qui apparaît pour une fréquence donnée à une certaine amplitude.

Pour les faibles amplitudes, le système d'ondes circulaires est stable, et devient instable pour les amplitudes plus élevées. Le phénomène inverse se produisant pour l'autre système de vagues.

Pour les fréquences voisines de la fréquence de résonance du système, il est impossible, en augmentant l'amplitude, de maintenir le premier régime jusqu'à l'amplitude théorique à atteindre, le système passant trop rapidement au second régime.

Nous avons tracé pour quelques fréquences les courbes, amplitudes en fonction de l'intensité, cette dernière allant tout d'abord en croissant, puis en décroissant par la suite ; nous obtenons les graphiques donnés sur le plan n° 11 qui mettent en évidence la chute d'amplitude obtenue lors du changement de régime.

II₂ - Nombre de crêtes et de creux

Lorsque la fréquence d'excitation varie, le nombre de maxima observé est également variable, mais leur nombre est toujours un nombre pair $2n$.

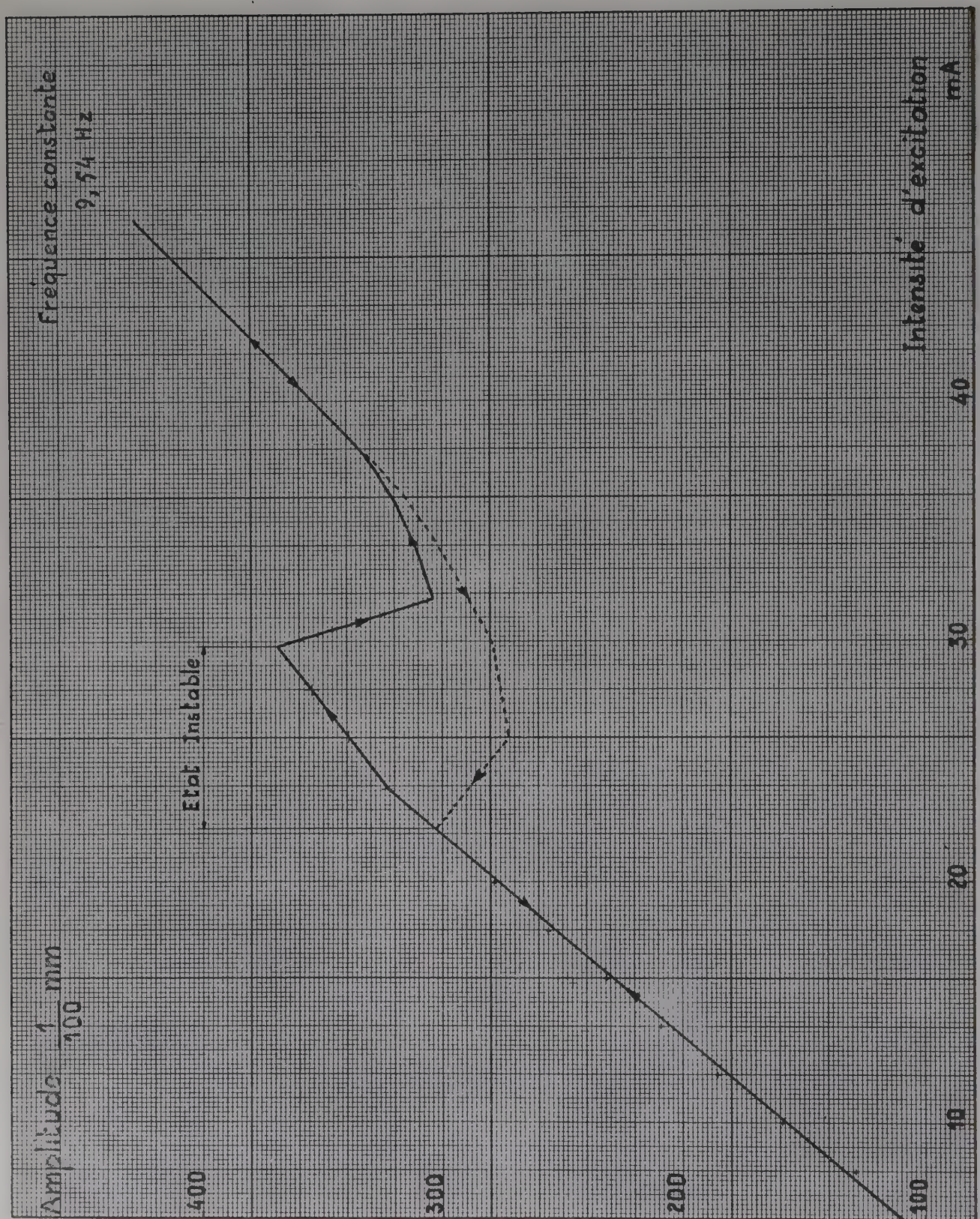
Dans la plage de fréquences étudiée de 10 à 20 Hertz nous avons obtenu des valeurs de n variant de 4 à 10. Ce nombre varie avec l'immersion de la sphère, cependant il est très difficile à déterminer pour les faibles immersions (1 cm) ou les grandes immersions (6 - 7 cm).

Sur la sphère, ainsi que le montrent les clichés 1 et 2, nous notons que les crêtes sont plus accentuées que les creux.

Par rapport au plan de repos, le fluide atteint sur le maximum une hauteur supérieure à l'enfoncement du minimum, ce dernier présentant une courbure plus faible.

En outre, deux crêtes voisines sont en opposition de phase (voir plan n° 12 représentant deux passages successifs de la sphère au sommet de sa trajectoire), créant ainsi dans chaque secteur propre à un maximum, un système de vagues, déphasé de π radians par rapport aux deux secteurs limitrophes.

Les clichés 3 et 4 représentent l'image du train d'ondes photographié par réflexion et mettent en évidence ce décalage.



II₃ - Mouvement des particules placées sur la surface libre du fluide

Afin d'étudier le mouvement de la surface libre du fluide, nous avons pulvérisé, sur cette dernière, de la poudre d'aluminium très fine. Lorsque le système vibre dans le second régime, nous notons les mouvements suivants :

Les particules s'éloignent du solide immergé sur les rayons aboutissant aux différentes crêtes, et reviennent vers ce corps sur les rayons compris entre deux maxima. Ces derniers étant les seuls à conserver au cours du temps, une ordonnée constante, et sensiblement égale en première approximation à celle du fluide au repos. Ils apparaissent nettement sur les clichés 1, 2, 3 et 4, comme zone de séparation de deux secteurs.

Entre deux rayons, l'un de départ, l'autre d'arrivée des particules, nous observons la formation de zones tourbillonnaires (cliché n° 5) . Deux tourbillons voisins tournant en sens inverse.

Ce mouvement des particules en suspension, que nous venons de décrire, apparaît très nettement pour certaines fréquences et nous avons eu la possibilité de le filmer.

Certains éléments en suspension dans le fluide montrent que le mouvement induit par la sphère s'amortit très rapidement en profondeur. Pour une fréquence de 12 Hertz avec une sphère de 80 mm de diamètre et pour des amplitudes de 3 mm le mouvement n'intéresse qu'une épaisseur de liquide de 1 cm environ.

D'autres essais ont été effectués avec une sphère de 160 mm de diamètre sans pouvoir obtenir des résultats quantitatifs, le mouvement de la surface libre est alors tel que les parois du bassin (1,5 m x 1,5 m x 0,8 m de profondeur) influencent très nettement le phénomène.

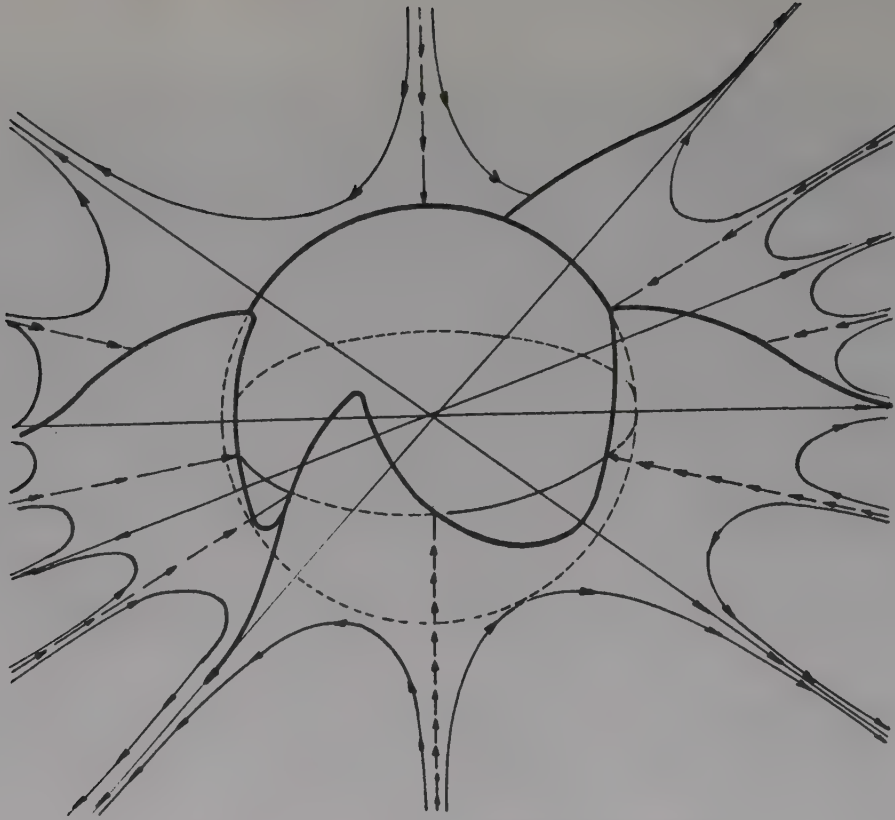
Pour la sphère de 80 mm de diamètre, l'influence des bords est nulle, car il est possible dans certains cas, de faire subir à l'ensemble du système de vagues, une rotation d'ensemble autour de l'axe de vibration. Toutes les positions, quel que soit l'azimut, étant des positions stables, bien que le bassin ait une forme carrée.

III - CONCLUSION SUR LES RESULTATS QUALITATIFS

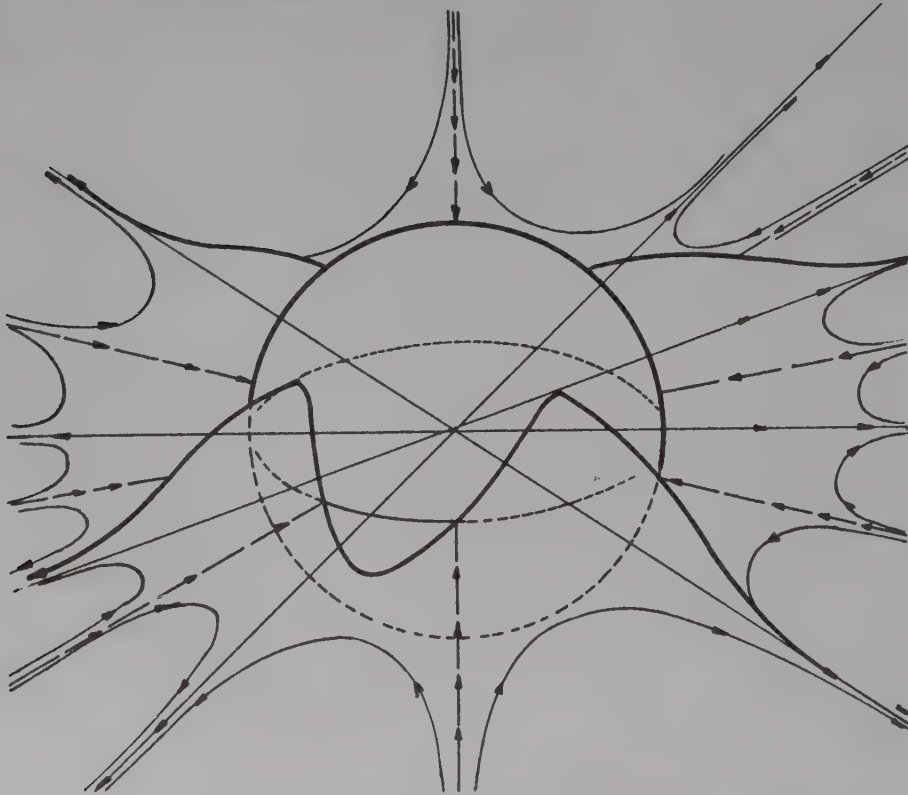
L'étude qualitative du paragraphe précédent montre qu'expérimentalement, il est possible de retrouver les résultats théoriques définis au chapitre A.

En outre, les mouvements des particules, matérialisant chaque élément fluide de la surface libre, coïncident avec les lignes de vibrations établies au chapitre A et correspondant au mouvement défini par les termes de second ordre du potentiel des vitesses (pour une valeur de n donnée).

Les différents modes de vibrations, et l'amortissement rapide en profondeur du mouvement du fluide, nous montrent qu'il est possible d'assimiler ce mouvement à celui d'une membrane hydraulique excitée en son centre par la sphère, ou un solide S.



Premier passage de la sphère au maximum de sa course. $n = 4$



Second passage de la sphère au maximum de sa course. $n = 4$

Ce dernier problème présente une certaine analogie avec celui des membranes solides, tant au point de vue résolution mathématique (solution particulière de l'équation de LAPLACE) qu'au point de vue résultats expérimentaux, puisque l'on retrouve pour les membranes solides, les différents modes de vibrations. Une théorie complète de ces vibrations est donnée par plusieurs auteurs, en particulier : Lord J.W. RAYLEIGH et H. LAMB.

Cependant certaines divergences apparaissent entre le problème traité et celui qui nous intéresse, notamment en ce qui concerne les conditions limites. Dans un cas, celui des membranes solides, les amplitudes sont connues avec exactitude au centre et sur le contour (nulles en général) ; dans l'autre cas, l'excitation centrale n'est pas ponctuelle et en plus le diamètre et l'épaisseur de la membrane sont inconnus.

Un problème similaire concernant les vibrations de membranes liquides, formées sur un cadre circulaire de quelques millimètres de diamètre, a été étudié expérimentalement par M.R. TREHIN ; l'auteur met en évidence les rayons nodaux, les maxima en opposition de phase et les zones tourbillonnaires que nous avons notés.

IV - INTERPRETATION DES RESULTATS

IV₁ - Hypothèse

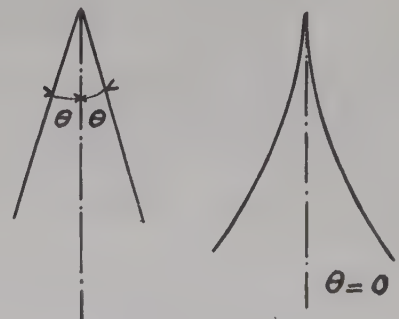
Les différentes observations effectuées aux cours des expériences et notées dans les paragraphes précédents, nous permettent de conclure que nous obtenons, sur le contour du solide immergé, en contact avec la surface libre, une onde stationnaire, identique à celle généralement obtenue par réflexion d'un train d'ondes sur un obstacle perpendiculaire au mouvement.

Cette hypothèse nous permettra dans le paragraphe VI de calculer les fréquences d'excitation correspondant aux différents modes, ainsi que le nombre n de maxima apparaissant sur le contour immergé.

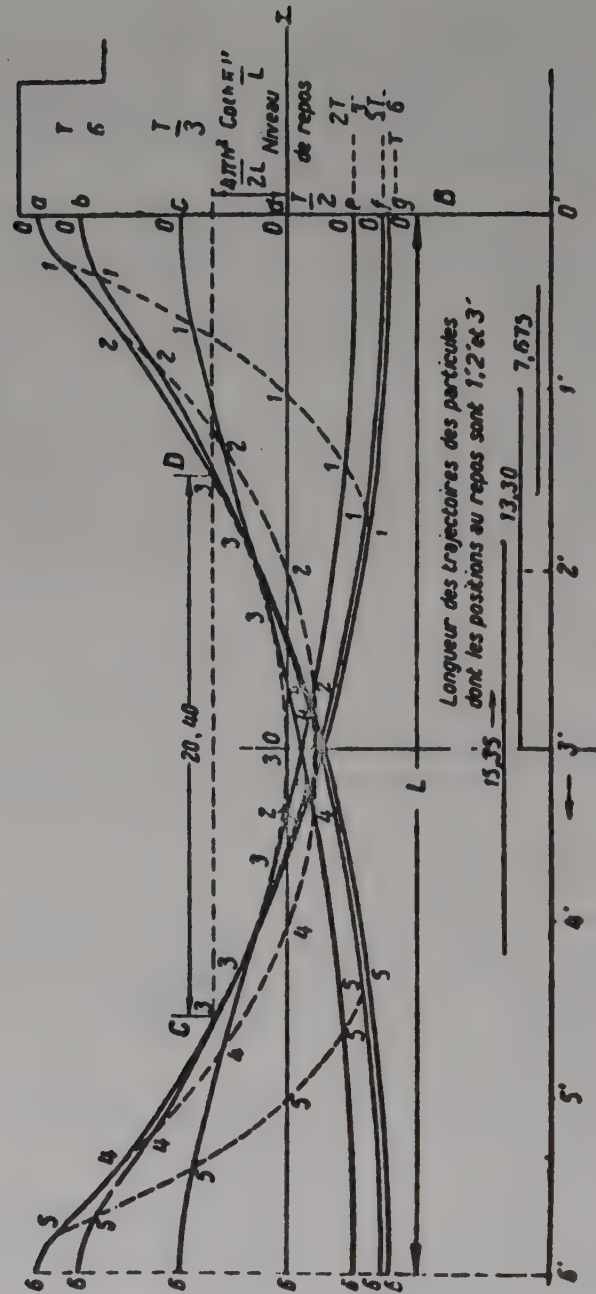
La forme des vagues observée sur le solide correspond à la forme trochoïdale théorique que nous reproduisons (plan n° 13), sur cette dernière nous pouvons noter le mouvement des différents points de la surface libre du fluide.

Pour les amplitudes plus élevées, l'expérience nous montre que l'angle 2θ défini par les tangentes au sommet d'une crête (figure ci-contre) peut atteindre une valeur pratiquement nulle.

Cette constatation rejoint la théorie de N.N. DJOUNKOVSKI, qui a montré que cet angle pouvait s'annuler dans le cas des ondes stationnaires, et que cette valeur correspondait à la cycloïde.



SCHEMA D'UNE ONDE STATIONNAIRE



IV₂ - Mouvement des points situés sur la surface libre

Considérons un plan passant par l'axe de révolution du solide . Dans ce plan, le solide implique au fluide une vitesse radiale, qui est fonction de sa forme et de sa fréquence d'excitation.

L'onde ainsi formée s'amortit, et nous avons montré dans les paragraphes précédents, quelle devient rapidement assimilable à une houle théorique.

Entre deux plans radiaux, passant par les noeuds de vibrations de l'onde stationnaire (hypothèse du paragraphe IV₁) nous définissons un secteur à l'intérieur duquel la houle créée va se propager. Pour deux secteurs voisins, les ventres de vibrations de l'onde stationnaire étant en opposition de phase, les ondes propagées seront également déphasées de π radians (cliché n° 3).

En outre, nous savons que l'agitation des vagues produit, non seulement un mouvement oscillatoire des particules, mais encore un petit mouvement de progression de toute la masse d'eau dans le sens de propagation des vagues. Ce mouvement s'amortit rapidement, dans le sens de la profondeur.

Dans le cas d'une profondeur infinie, la vitesse de progression du liquide, dans le sens de propagation des vagues a pour valeur :

$$U = h^2 \sqrt{g} \sqrt{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3 e^{-\frac{2\pi Z}{L}}}$$

avec :

2 h	dénivellement entre crête et creux
2 L	longueur d'onde
Z	profondeur sous la surface libre

Pour les points situés sur la surface libre :

$$Z = 0$$

et

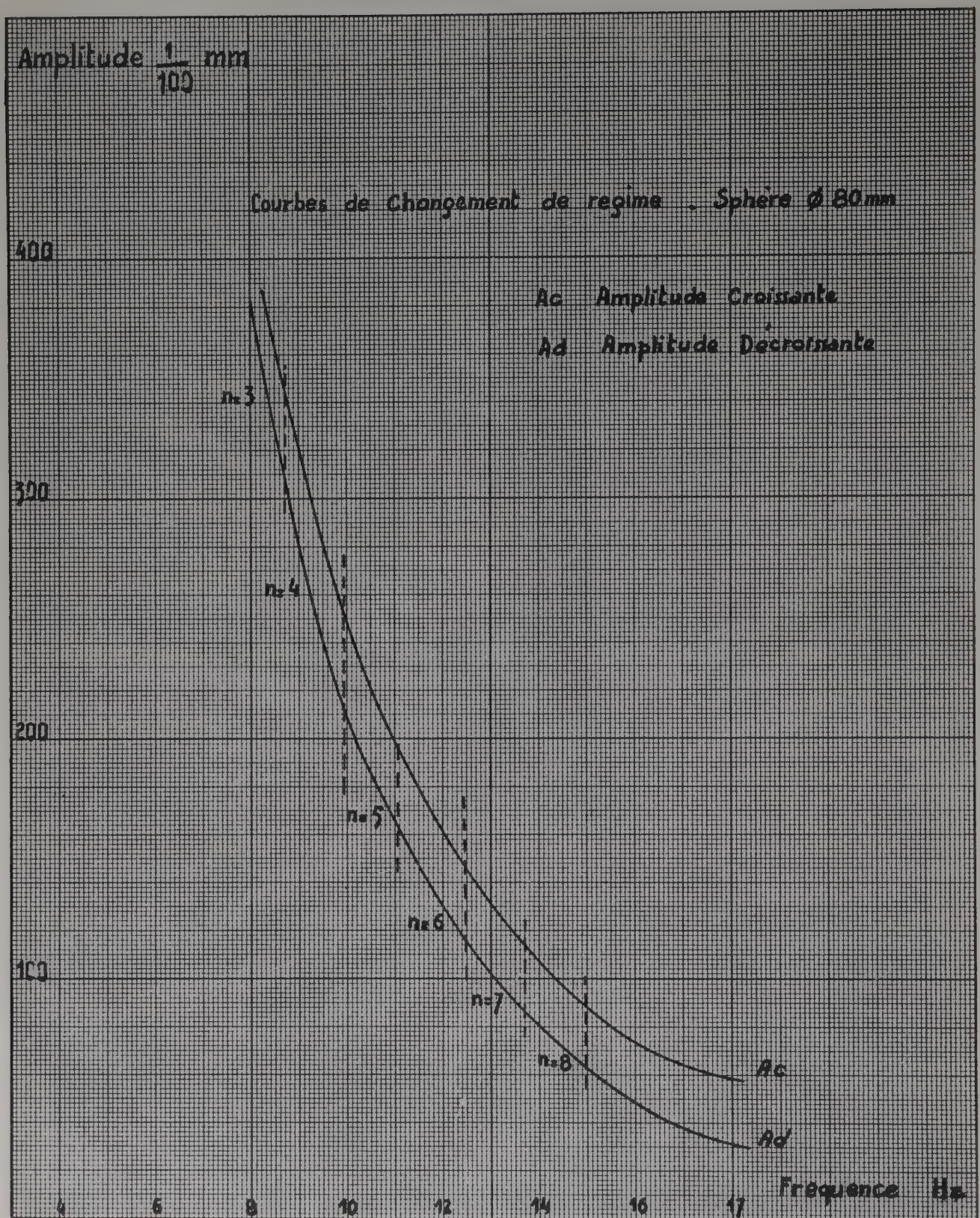
$$U = h^2 \sqrt{g} \left(\frac{\pi}{L}\right)^{\frac{3}{2}}$$

La figure n° 13 nous montre que la dénivellation 2 h est maximum pour les points des plans passant par les crêtes des ondes stationnaires. En outre, les vitesses des points de la surface libre compris dans ces plans sont verticales (points 0 et 6) dans le mouvement engendré par l'onde stationnaire.

Ainsi chaque point de la surface libre, appartenant à un plan radial passant par une crête, a une vitesse contenue dans ce plan et égale à la composition des vitesses, verticale pour le mouvement dû à l'onde stationnaire, et, horizontale pour le mouvement de propagation du liquide.

La hauteur h étant maximum au voisinage du solide immergé, il en sera de même pour la vitesse de progression.

Pour les éléments appartenant à un plan radial coupant l'onde stationnaire en un point quelconque, la vitesse due au déplacement de cette dernière n'est plus située dans un plan vertical, mais possède une composante circonférentielle (points



3, 4 et 5).

Notons également, que pour le plan vertical, radial, passant par le creux de l'onde, le niveau de la surface libre reste constamment inférieur, ou au plus égal, au niveau de repos. D'où la possibilité d'un retour des particules préalablement éloignées par la crête de l'onde.

Expérimentalement, ce mouvement des particules de la surface libre est très net.

V - RESULTATS EXPERIMENTAUX

V₁ - Courbes de changement de régime

Imposons à la sphère, partiellement immergée, un mouvement sinusoïdal. La fréquence de ce mouvement étant fixée, augmentons l'amplitude jusqu'à la valeur A_c , correspondant au changement de régime, décrit précédemment.

Cette seconde forme de vibration étant établie, nous notons qu'elle reste parfaitement stable lorsque l'amplitude augmente. Pour des valeurs élevées de cette dernière, les crêtes présentent une forme étroite très accentuée. Lorsque l'amplitude diminue, le second régime reste stable jusqu'à une valeur A_d inférieure à la valeur A_c .

Nous avons établi, en fonction de la fréquence d'excitation, les valeurs de A_c et A_d , ainsi que le nombre de creux et de crêtes, pour une sphère à demi-immergée.

La courbe présentée sur le plan n° 14 a été obtenue en utilisant un excitateur de grande puissance, qui avait l'avantage, d'une part, d'imposer à la sphère des amplitudes bien déterminées et indépendantes de la masse apparente de la sphère, mais d'autre part, avait l'inconvénient de manquer de sensibilité lors du changement de régime. Pour cette raison, nous lui avons préféré, pour les autres expériences, le système à lames vibrantes, plus sensible et permettant ainsi de noter le passage d'un régime à l'autre avec une précision beaucoup plus grande.

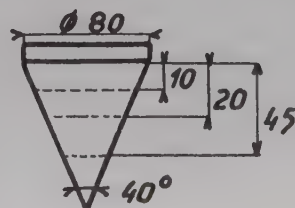
Les plans n° 15 et n° 16 donnent les valeurs de A_c pour une sphère de 80 mm de diamètre et pour une autre sphère de 120 mm.

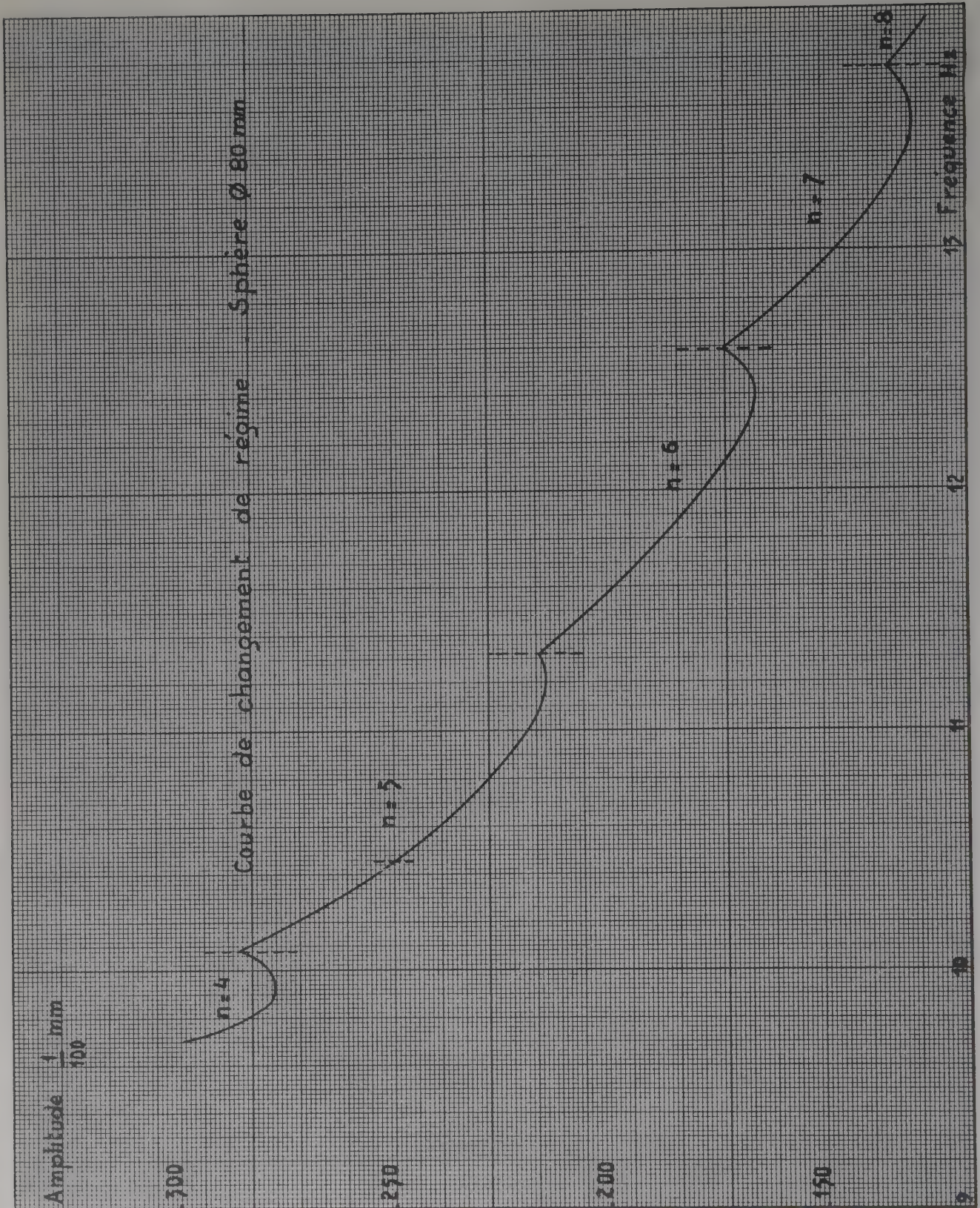
Pour un nombre de crêtes inférieur à 6 ou 8 ($n = 3$ ou 4) les amplitudes deviennent trop élevées et sont incompatibles avec la déformation des lames. Pour $n > 8$ ou 9, les amplitudes du mouvement sont trop faibles et il devient pratiquement impossible de distinguer le changement de régime.

Des résultats analogues ont été obtenus en utilisant un cône dont les caractéristiques géométriques sont données ci-contre.

L'immersion du cône ayant successivement pour valeur :

$h = 45 \text{ mm}, 20 \text{ mm}, 10 \text{ mm}.$





Nous donnons avec les plans n° 17 et n° 18, les résultats relatifs aux deux premières immersions.

V₂ - Points doubles

a)- zone d'instabilité

Les courbes de changement de régimes montrent que pour une certaine plage de fréquences, le nombre n reste constant, et qu'aux extrémités de cette plage, et pour deux fréquences bien déterminées, on obtient indifféremment : $n - 1$ et n ou $n + 1$ et n maxima. Ces points seront désignés par la suite par la dénomination "points doubles".

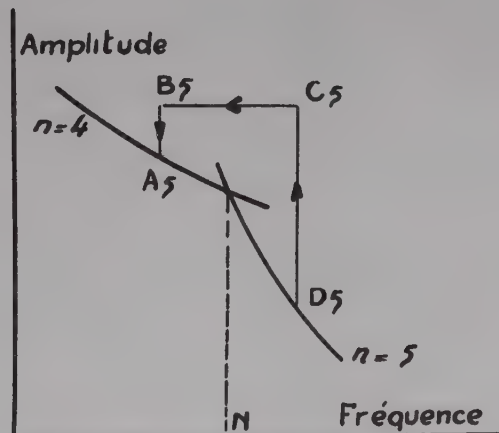
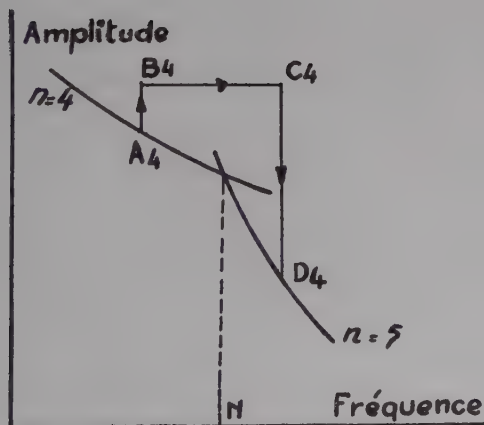
Au voisinage de ces points doubles, nous avons pu effectuer l'expérience suivante : (figure ci-dessous)

- Partant de A avec un nombre $n = 4$ par exemple, on passe, en faisant varier l'amplitude ou la fréquence séparément, en B puis en C et enfin en D, en conservant $n = 4$. Le point D se trouvant théoriquement sur la courbe $n = 5$ en D si l'amplitude continue à diminuer, le phénomène cesse.

Il est également possible de partir de D avec $n = 5$, de décrire la par-cours DCBA et aussi de conserver en A la valeur $n = 5$.

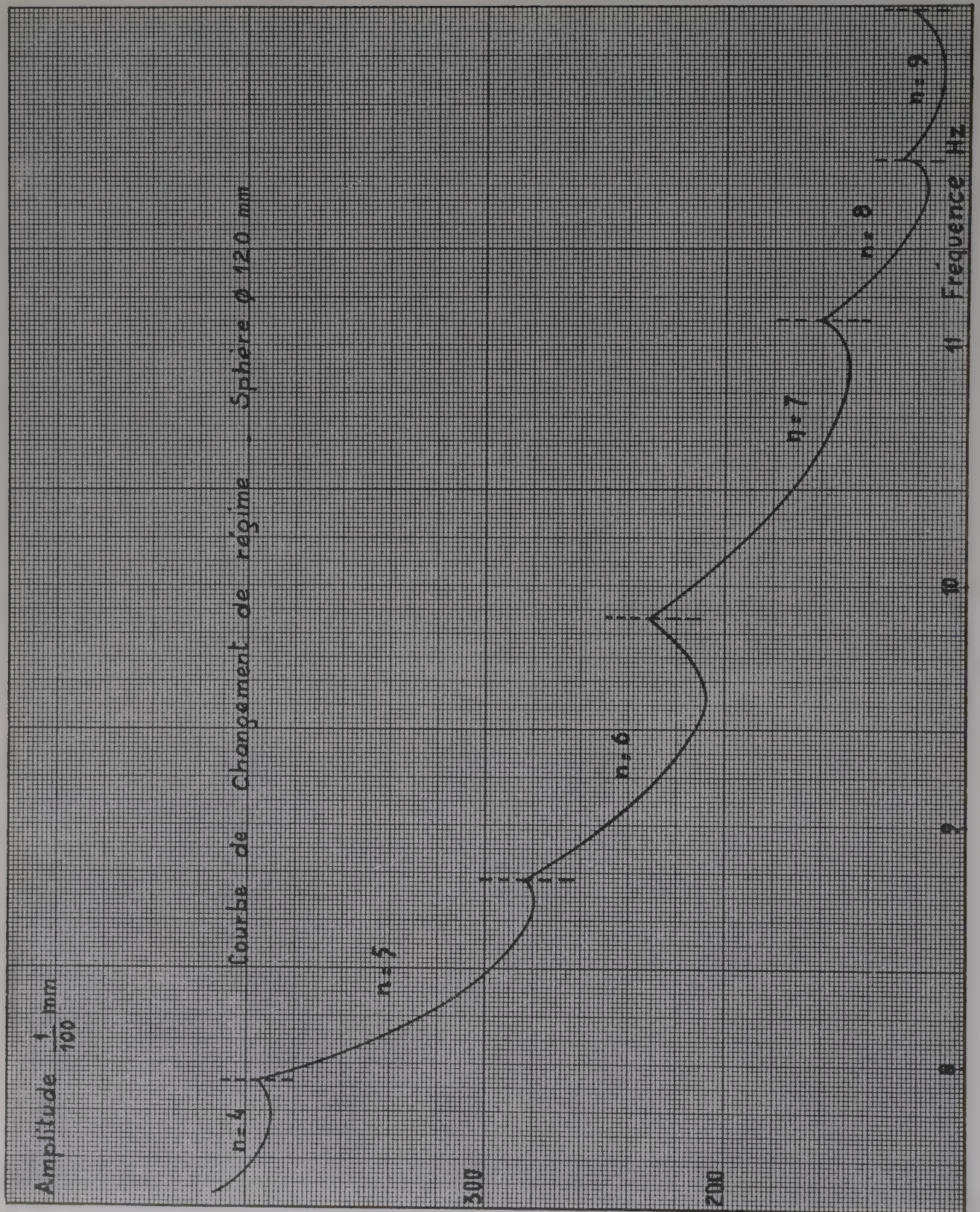
Ceci pour des points A et D très voisins du point P.

Il existe donc au voisinage des points doubles des zones d'instabilité.



b)- Fréquences et amplitudes des points doubles

Désignons par $N_{n,n+1}$ la fréquence correspondant au point double P séparant les zones $n, n+1$.



Pour différents solides immergés, traçons (plan n° 19) les variations

$$\overline{Nn, n+1}^2 = F(n, n+1)$$

Dans les limites se rapportant aux expériences effectuées, ces variations sont linéaires quel que soit le solide immergé.

Ainsi, les plages de fréquences, pour lesquelles la valeur de n reste constante, vont en diminuant lorsque n augmente.

Les amplitudes des points doubles sont inversement proportionnelles au carré de la fréquence.

$$A_{n, n+1} = \frac{C}{\overline{Nn, n+1}}^2$$

il devient donc très délicat de délimiter les plages pour les valeurs de $n > 10$, car d'une part elles sont très étroites et d'autre part les amplitudes sont faibles.

Pour une sphère de diamètre 80 mm, à demi-immergée et excitée à la fréquence de 20 Hertz, on obtient le second régime quelles que soient les amplitudes d'excitation.

Pour les fréquences basses, 5 Hertz par exemple, l'amplitude nécessaire à donner à la sphère pour obtenir le second régime, est de 8,1 mm.

V₃ - Influence du diamètre d'immersion des solides

L'étude des droites $Nn, n+1 = F(n, n+1)$ montre (plan n° 19) que pour une immersion du cône n° 1, $h = 0$, soit un diamètre immergé de 80 mm (résultats obtenus par extrapolation des valeurs mesurées pour $h = 45, 20$ et 10 mm) les points doubles ainsi obtenus se confondent avec ceux déterminés expérimentalement pour la sphère de 80 mm, lorsque cette dernière est à demi-immergée. Donc, lorsque les deux contours immergés ont même diamètre.

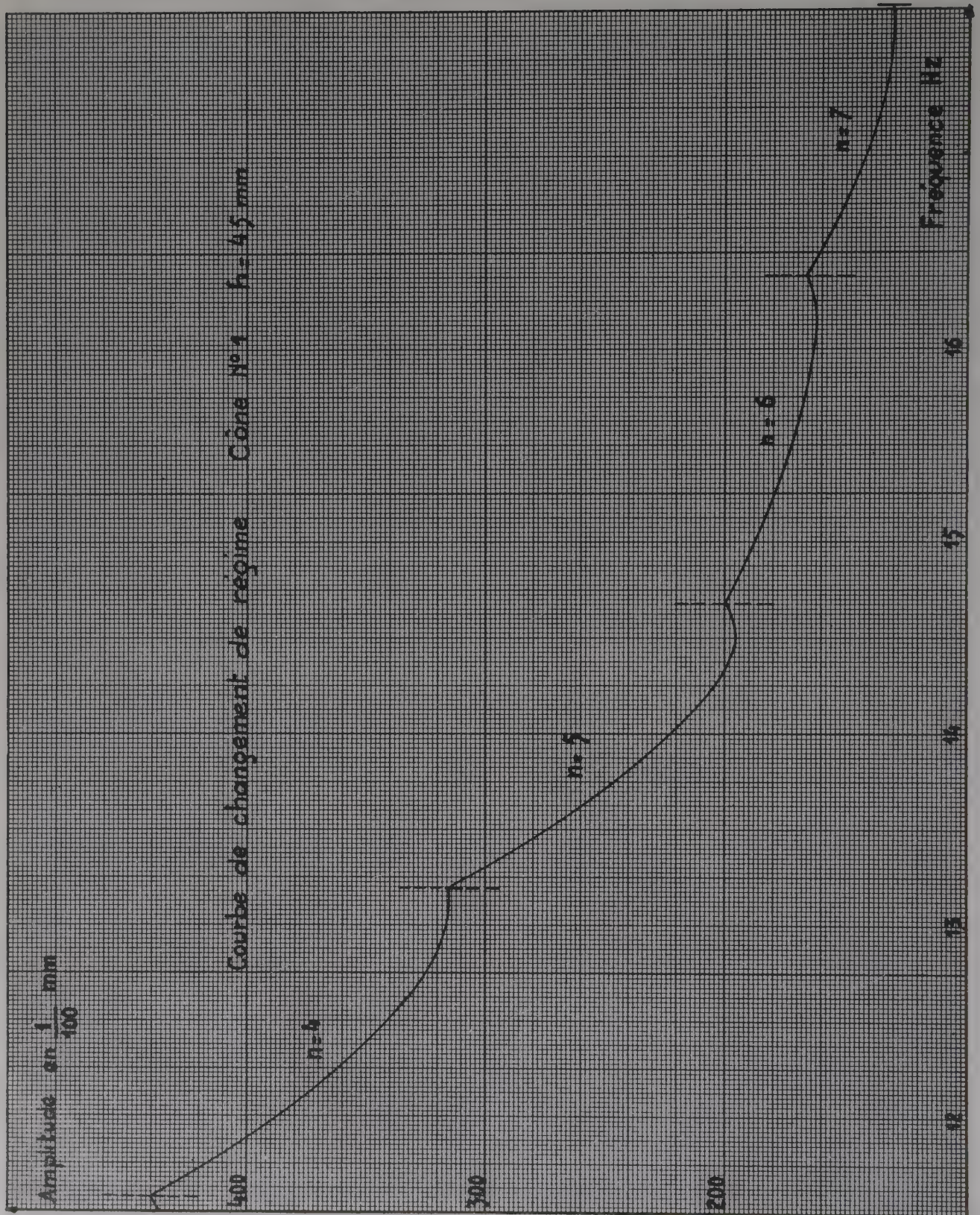
Ainsi, pour une fréquence d'excitation fixée, n (nombre de crêtes et de creux) dépend uniquement du diamètre du solide immergé en contact avec la surface libre.

La relation existant entre la fréquence d'excitation et le nombre n , est établie dans le paragraphe suivant.

VI - DETERMINATION DES MODES DE VIBRATIONS

VI₁ - Condition limite sur le contour immergé

La condition limite sur le contour immergé fait intervenir la longueur de l'anneau fluide, immédiatement concentrique au solide, et situé au voisinage de la surface libre.



Pour chaque fréquence d'excitation, la longueur de cet anneau doit déterminer les modes de vibrations (nombre de maxima et de minima).

Cette longueur étant calculée en prenant comme diamètre moyen de l'anneau la diamètre D du solide immergé en contact avec la surface du fluide au repos (figures ci-contre).

Le mouvement vibratoire du solide

$$z = z_0 \cos \sigma t$$

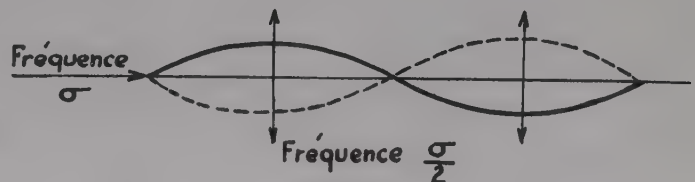
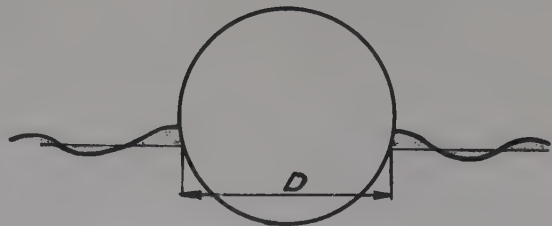
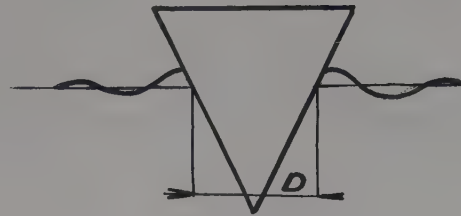
se traduit pour les éléments fluides en contact avec ce solide, par des variations de pression de pulsation

Un raisonnement analogue à celui effectué dans la théorie des poutres vibrantes (figure c), montre que la fréquence de vibration de chaque tronçon compris entre deux noeuds de vibration, est égale à la moitié de la fréquence d'excitation.

Expérimentalement, on observe effectivement que, dans le cas où :

$$n \neq 0$$

la fréquence d'oscillation de chaque maximum est égale à $\frac{\sigma}{2}$



Assimilons l'anneau concentrique, compris entre le solide et le premier noeud radial à un tube fluide de même longueur l , que l'anneau développé.

Les modes de vibrations acceptables pour ce tube fluide, sont représentés ci-dessous sur la figure a. Les modes représentés sur la figure b, ne satisfaisant pas à la condition de continuité, lorsque l'anneau est refermé sur lui-même, sont inacceptables.

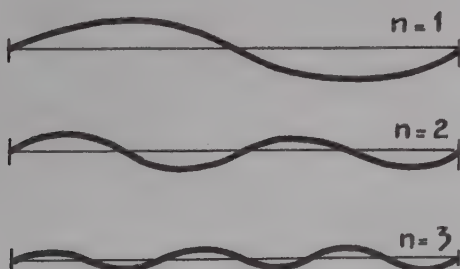


Fig a

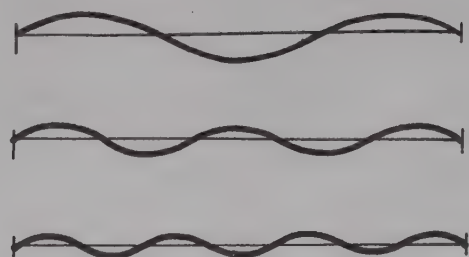
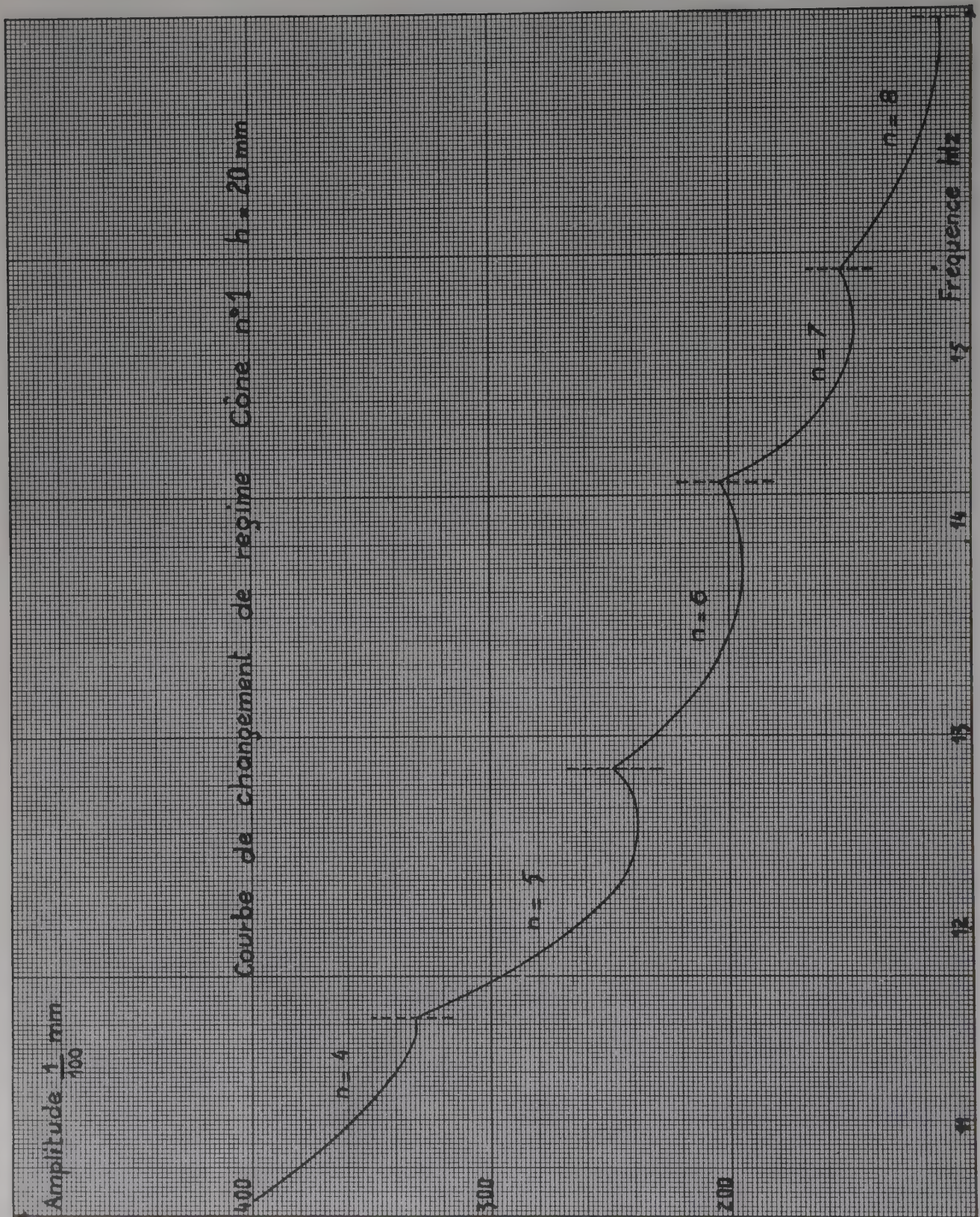


Fig b

Considérons un mode particulier : $n = 4$, par exemple (figure c)



désignant la longueur d'onde
et l la longueur totale, nous
avons la relation :

$$\lambda_4 = \frac{l}{4}$$



Fig c

La longueur d'onde et la fréquence d'oscillation sont reliées par la relation (chapitre A - 6₂)

$$\lambda = \frac{K}{N^2} \quad \text{avec}$$

$$K = 1,56 \text{ (M.K.S.)}$$

N_4 désignant la fréquence correspondant au mode 4, il vient :

$$\frac{K}{N_4^2} = \frac{l}{4}$$

soit :

$$\frac{N_4^2}{4} = \frac{K}{l} = \text{constant.}$$

Un raisonnement analogue conduit dans le cas général au résultat :

$$\boxed{\frac{N^2 n}{n} = \frac{g}{2 \pi^2 D}}$$

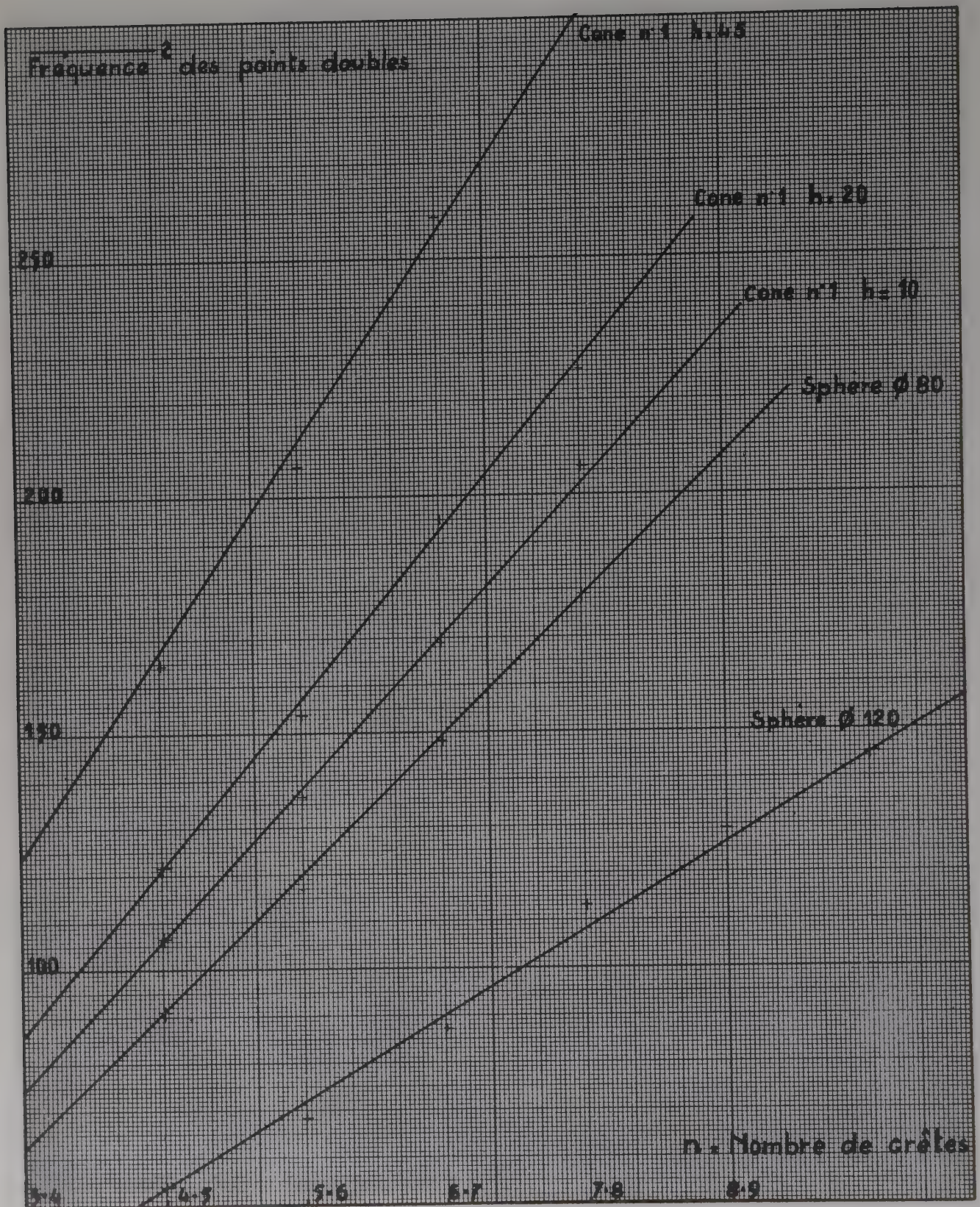
Conclusion :

L'hypothèse posée au début de ce paragraphe, consistant à assimiler les vibrations de l'anneau fluide immédiatement concentrique au solide immergé (au voisinage de la surface libre) à celles d'un tube fluide de même longueur que l'anneau développé, permet de déterminer une relation théorique identique à la relation expérimentale (chapitre D V₂ b).

Ce résultat reste valable, théoriquement et expérimentalement, quelle que soit la forme du solide immergé (sphères ou cônes).

Dans le cas d'un cylindre circulaire, la relation reste acceptable, mais les amplitudes verticales à communiquer au solide sont trop élevées pour établir expérimentalement le phénomène.

Une vérification expérimentale de cette relation fait l'objet du paragraphe suivant.



VI₂ - Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux

VI₂ - 1 - Calcul de n

Les courbes de changement de régime mettent en évidence les fréquences pour lesquelles le phénomène présente la possibilité de vibrer suivant le mode n ou $n + 1$. La fréquence correspondant au mode n est donc terminée expérimentalement par deux limites, l'une inférieure correspondant au point double $n, n - 1$, l'autre supérieure relative au point double $n, n + 1$.

Nous pouvons donc comparer, les valeurs théoriques calculées, en nous plaçant dans l'hypothèse du paragraphe précédent, avec les valeurs extrêmes définies expérimentalement.

Les deux tableaux ci-dessous, donnent ces valeurs comparatives, pour la sphère de diamètre 80 mm d'une part, et pour la sphère de 130 mm d'autre part.

Chacun de ces solides étant au repos, à demi-immergé, considérons, comme nous l'avons signalé précédemment, que le diamètre moyen du premier anneau correspond à celui du solide immergé, au niveau de la surface libre

pour la sphère de 80 mm de diamètre :

$$\begin{array}{lcl} \text{longueur développée} & l & = \pi \times D \\ \text{soit} & l & = 0,251 \end{array}$$

la relation :

$$\frac{N^2}{n} = \frac{K}{l}$$

donne :

$$\frac{N^2}{n} = \frac{1,56}{0,251} = 6,22$$

Pour la sphère de 130 mm de diamètre, un calcul analogue conduit au résultat :

$$\frac{N^2}{n} = 3,82$$

d'où les résultats :

Sphère $\varnothing$ 8 cm.

n	4	5	6	7	8	9
N^2	24,8	31,0	37,2	43,5	49,6	55,8
N	4,98	5,57	6,10	6,61	7,05	7,46
Fréquences d'excitations théoriques	9,96	11,14	12,20	13,21	14,13	14,92
Fréquences expérimentales mini - maxi.	10,1	10,1-11,3	11,3-12,6	12,6-13,7	13,7-14,8	14,8-15,7

Sphère $\varnothing$ 13 cm.

n	4	5	6	7	8	9
N^2	15,25	19,18	22,90	26,71	30,50	34,30
N	3,90	4,37	4,78	5,17	5,52	5,82
Fréquences d'excitations théoriques	7,80	8,74	9,56	10,34	11,04	11,70
Fréquences expérimentales mini - maxi	7,94	7,94-8,8	8,8-9,90	9,9-11,1	11,1-11,7	11,7-12,4

Les résultats théoriques semblent donc en parfait accord avec les résultats expérimentaux, pour ces deux solides immergés.

VI₂₋₂ - Influence de la forme géométrique du solide immergé

a) sur le mode de vibrations

Dans le calcul précédent, permettant de déterminer le mode de vibration de la surface libre, excitée par un solide partiellement immergé, on admet par hypothèse que seule la longueur du contour immergé intervient. Afin de vérifier cette hypothèse, étudions les vibrations d'une série de cônes de révolution, dont les caractéristiques géométriques sont les suivantes :

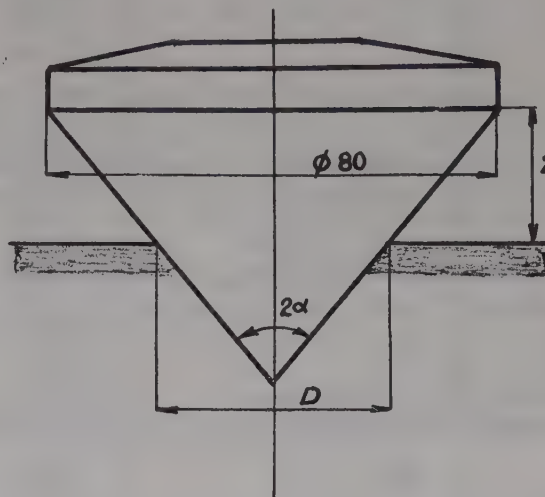
= 20, 25, 30, 35, 40, 45°

diamètre de base = 80 mm pour tous les cônes.

L'immersion est définie par la cote z .

Pour chaque immersion, et pour les différents cônes, nous relevons :

- le nombre de crêtes $2n$ (mode n)
- la fréquence d'excitation N
- l'amplitude nécessaire à communiquer au solide pour obtenir le changement de régime.



D'autre part, connaissant le diamètre immergé D , et la fréquence d'excitation, nous pouvons calculer le nombre n , en respectant l'hypothèse du paragraphe précédent :

$$\lambda = \frac{K}{N^2} = \frac{l}{n}$$

d'où

$$n = \frac{N^2 l}{K}$$

le nombre n calculé, ne peut être qu'un nombre entier, or les applications numériques donnent des valeurs fractionnaires. Ce qui provient du fait que la longueur l varie légèrement en fonction de la fréquence d'excitation.

Les résultats théoriques et expérimentaux, reportés dans le tableau ci-dessous, sont en parfait accord, et permettent de conclure que le mode de vibration de la surface libre du liquide est indépendant de la forme géométrique du solide de révolution

Cône		Immersion cm	Longueur circonfér. immergée	Fréquence d'excitation Hertz	n calculé	n expérimental
N° 1	20°	2	20,78	17,25	9,9	9
		2	20,78	15,40	7,9	7
		2	20,78	13,55	6,1	6
		1	22,90	17,25	10,85	10
		1	22,90	15,40	8,67	8
N° 4	25°	2	19,50	18,52	10,70	9
		2	19,50	16,68	8,68	8
		4	13,81	18,52	7,62	7
		4	13,81	16,68	6,15	6
N° 5	30°	2	18,2	18,85	10,03	9
		2	18,2	16,95	8,35	8
		2	18,2	15,15	6,70	6
N° 6	35°	2	16,35	13,50	4,8	5
		4	7,54	19,2	4,45	5
N° 2	40°	2	14,7	20,4	9,7	8
		2	14,7	17,25	7	7
N° 7	45°	2	12,56	20,8	8,75	8
		2	12,56	17,25	6,04	6

b) sur les amplitudes

Ces expériences ont montré que la forme géométrique du solide avait une influence sur l'amplitude à donner au solide, pour obtenir le changement de régime.

Cependant, la dispersion des résultats expérimentaux, due au nombre élevé de paramètres définissant la forme et la position du corps, n'a pas permis d'établir une règle expérimentale.

- CONCLUSION -

L'étude théorique du mouvement de la surface libre du fluide, sous l'action des vibrations d'un solide de révolution partiellement immergé, montre que cette surface peut vibrer suivant différents modes. Ces derniers appartenant aux deux groupes distincts correspondant aux valeurs $n = 0$ et $n \neq 0$ (chapitre A)

Dans le premier cas $n = 0$, les ondes sont circulaires (1^o régime).

Dans le second cas $n \neq 0$, le système de vagues présente sur le contour immergé un nombre n de maxima et de minima.

Ces deux régimes de vibrations apparaissent expérimentalement, lorsque certaines conditions relatives à l'amplitude et à la fréquence du mouvement d'excitation sont satisfaites.

Pour un solide de révolution la courbe définissant l'amplitude du changement de régime en fonction de la fréquence, peut être traduite par une équation de la forme :

$$A = \frac{K}{N^2} \quad (1)$$

avec :

- A amplitude du solide correspondant au changement de régime
- N fréquence d'excitation
- K constante, fonction, d'une part de la forme du solide et de ses dimensions, d'autre part des caractéristiques du fluide (température tension superficielle ...)

La détermination expérimentale ou théorique de ce coefficient n'a pas été abordée dans notre étude, en raison du nombre trop élevé de paramètres dont dépend ce coefficient.

La relation (1) montre que pour des fréquences d'excitation relativement faibles, les amplitudes nécessaires à communiquer au solide, pour obtenir le changement de régime, sont trop importantes pour être établies expérimentalement.

En effet, pour une sphère de 80 mm de diamètre, à demi-immergée, et pour une fréquence de 5 Hertz, l'amplitude est :

$$A = 8,1 \text{ mm}$$

Pour les fréquences supérieures à 20 Hertz, on obtient le second régime pratiquement quelle que soit l'amplitude communiquée au solide (chapitre D - V.).

Le second régime de vibration est caractérisé d'une part, par l'amplitude A , d'autre part, par le nombre n définissant le nombre de crêtes et de creux.

L'expérience permet d'établir, que ce nombre n dépend essentiellement de la fréquence d'excitation et du diamètre du solide immergé au voisinage de la surface libre. Il est indépendant de la forme géométrique du solide.

N_n désignant la fréquence d'excitation correspondant à n , ces deux valeurs sont reliées par la relation :

$$\frac{N_n^2}{n} = \text{constante} \quad (2)$$

En admettant par hypothèse que l'onde créée au voisinage du solide immergé, est assimilable à une onde stationnaire, il devient possible de déterminer la valeur de la constante (2) définissant ce rapport (chapitre D - VI).

$$\text{constante} = \frac{g}{2 \pi l} \quad (3)$$

avec :

g accélération de la pesanteur
 $l = \pi D$ = longueur de la circonférence du solide immergé au contact avec la surface libre au repos

Cette hypothèse a été vérifiée expérimentalement pour des sphères de 80 mm et 130 mm de diamètre et une série de 7 cônes.

Les résultats expérimentaux et théoriques obtenus, sont en parfait accord, aux erreurs d'expériences près (chapitre D - VI 2 - 1).

Le mode de vibration de la surface libre apparaît donc comme indépendant de la forme géométrique du solide.

Pour certaines fréquences d'excitation, la surface libre du fluide peut vibrer indifféremment suivant le mode n ou le mode $n + 1$. La détermination expérimentale de ces points particuliers a permis de calculer la plage de fréquence correspondant au mode n (plage comprise entre les points $n, n + 1$ et $n - 1, n$).

Pour la série de cônes étudiée, les valeurs de n ainsi déterminées, coïncident avec celles définies théoriquement par l'hypothèse pré-citée (chapitre D-VI₂₋₂).

Le second régime étant établi, nous notons que, dans chaque secteur de la surface libre, défini par deux rayons aboutissant aux noeuds de l'onde stationnaire formée concentriquement au solide, l'onde créée se propage radialement et devient rapidement assimilable à une houle droite trochoïdale (chapitre A - VI₇). Les ondes relatives à deux secteurs voisins présentent entre elles un déphasage de π radians.

La combinaison de ces mouvements (ondes radiales et onde circonférentielle), permet d'expliquer le mouvement noté pour les particules appartenant à la surface libre du fluide (chapitre D - VI₂). Ce dernier se traduisant par un départ des particules sur les rayons aboutissant aux crêtes de l'onde stationnaire, et un

retour sur les rayons aboutissant aux noeuds de cette même onde.

La première partie de notre travail se rapporte à l'étude des "masses liquides virtuelles" par des solides partiellement immergés et animés d'un mouvement sinusoïdal.

Cette masse fictive étant définie par rapport au volume immergé, par la relation :

$$\mu = k V$$

nous avons pu établir expérimentalement les variations de ce coefficient k , en fonction de l'immersion du solide.

Pour une sphère animée d'un mouvement vibratoire dont la fréquence est supérieure à 5 Hertz, le coefficient k , tend, lorsque l'immersion devient totale, vers la valeur théorique définie par STOKES.

nous avons obtenu :

$$\begin{aligned} \text{valeur théorique} &= k = 0,510 \\ \text{valeur expérimentale} &= k = 0,513 \end{aligned}$$

L'expérimentation d'une série de cônes de révolution nous a montré que, pour un angle au sommet du cône déterminé, la "masse liquide virtuelle" est proportionnelle au cube de la hauteur immergée, c'est-à-dire proportionnelle au volume immergé.

Il apparaît ainsi, en première approximation, que l'influence de la surface libre est négligeable, dans la détermination de la masse apparente du solide.

Parallèlement à cette étude, nous avons déterminé la valeur du coefficient d'amortissement correspondant au mouvement des différents solides.

Si le changement de régime de vibration de la surface libre du fluide, n'introduit pas de variations notables dans la détermination du coefficient k défini ci-dessus, (l'influence de la surface libre étant négligeable). Ce même changement permet de constater que l'amortissement est plus élevé dans le second régime que dans le premier.

Lorsque l'immersion d'un solide est totale, seul le premier régime subsiste, et les résultats expérimentaux restent, aux erreurs de détermination près, voisins des résultats théoriques.

Pour une sphère, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ théorique} &= 0,0261 \\ \lambda \text{ expériment.} &= 0,0313 \pm 0,0046 \end{aligned}$$

+ + +
+
+

En conclusion, dans le cadre des recherches tendant à définir le comportement des solides "déformables" en présence de la surface libre d'un fluide, notre contribution, qui avait pour but d'étudier le mouvement des solides "indéformables" de révolution placés dans les mêmes conditions que les premiers, nous a permis de mettre en évidence que, le fluide sous l'action des sollicitations périodiques du solide, pouvait vibrer suivant deux modes distincts, définis essentiellement par deux caractéristiques du mouvement générateur qui sont :

- d'une part, l'amplitude, pour laquelle nous avons pu déterminer une loi de variation expérimentale en fonction de la fréquence d'excitation, mais qui dépend en outre d'un grand nombre de paramètres, dont l'étude théorique pourrait faire l'objet de recherches complémentaires.

- d'autre part, la fréquence d'excitation. L'influence de cette quantité sur le mode de vibration a été établie théoriquement et vérifiée par l'expérience, et nous pouvons envisager la transposition de cette relation au problème des mouvements de liquide contenu dans des capacités soumises à des vibrations verticales, qui fait l'objet de nombreux travaux actuels (B. BENJAMIN et F. URSELL) et qui présente avec nos recherches de nombreuses analogies.

+ + +
+

B I B L I O G R A P H I E

- 1 - J.W.S. RAYLEIGH - The theory of sound - pages 319 - 340
Vol. 1 - New-York Dover publications
 - 2 - L. MORSE - Vibration and sound - pages 187 - 200
Mc. Graw - Hill Book Company - Inc. 1948
 - 3 - J.W. WEHAUSEN and E.Y. LAITONE - Surface waves
Encyclopedia of Physics - S. FLUGGE - page 446
Vol. IX - Fluid Dynamics III (Springer - Verlag éditeurs)
 - 4 - H. LAMB - The dynamical theory of sound - page 150
New-York Dover publications - Inc.
 - 5 - N.N. DJOUNKOVSKI et P.K. BOJITCH - page 70 à suivre
La Houle (Eyrolles Editeur - Paris 1959)
 - 6 - J.J. STOKER - Water Waves
The two basic approximate theory - chapitre 2 , page 19
 - 7 - T. KUMAI et Y. OCHI
On the vibration of ships in wave
Reports of Reserach Institute for Applied Mechanics
Vol. XI N° 40 1963
 - 8 - C. WITOSZYNSKIEGO - Mouvement de liquide périodiquement symétrique par rapport
à un axe
C.R. SOC. Polytech. Varsovie - 1 - 1921 - 11 - 60
J. Physique Serie VI n° 11 - 692 D.
 - 9 - L. MARTY - Oscillations de translation d'une sphère dans l'eau - masse
entraînée - amortissement
Journal de Physique 1935 - 6 - 373 - 382
 - 10 - VON J.O. HINZE - Sur les mouvements par ondes circulaires produits dans un
liquide par des compressions périodiques.
Journal de physique 1936 - Série VII - n° 11 page 324 D.
ZEITSCHRIFT FUR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
Band 16 - Fev. 1936 - 143 - 152.
 - 11 - T.B. BENJAMIN and F. URSELL
The stability of the plane free surface of a liquid in
vertical periodic motion
Proceedings of the Royal Society of London
N° 1160 - 6 August 1954 - Vol. 225 page 505
 - 12 - TREHIN - Sur les vibrations forcées des membranes liquides
J. Physique 10 - 1929 - 115 - 128
-

Deuxième Thèse

Propositions données par la Faculté

**ETUDE DE L'AEROELASTICITE
PHENOMENE DE FLOTTEMENT**

VU

Le Directeur de Thèse :

Y. PIRONNEAU

VU

Le Président du Jury :

Y. PIRONNEAU

VU et APPROUVE :

NANTES, le **14 MARS 1966**

Le Doyen de la Faculté des Sciences :

G. BRILLOUET

VU et PERMIS d'IMPRIMER

NANTES, le **18 MARS 1966**

Le Recteur de l'Académie de Nantes

Président du Conseil de l'Université

M. SCHMITT

